4月号演習問題解答

● 第27章 ●

【演習27-1】これは問題あるまい。引っ張り荷重が作用する丸棒だから，本文中の式（5）”に数値を代入すればいい。

$$U=\frac{P^2\ell}{2A\mathrm{E}} \qquad (5)”$$

$$=\frac{(20\times10^3)^2\times300}{2\times100\times207\times10^3}$$

$$=2.90\mathrm{kN\cdot mm}$$

【演習27-2】丸棒の先端からxとする（**図A**）。微小要素Adxが蓄えるひずみエネルギをdUとすると，本文中の式（5）”より次の式①が成立する。

$$dU=\frac{P^2}{2A\mathrm{E}}dx \qquad ①$$

ここで，長さxに働く自重による力Pは，

$$P=\gamma Ax$$

だから，

$$dU=\frac{(\gamma Ax)^2dx}{2A\mathrm{E}}$$

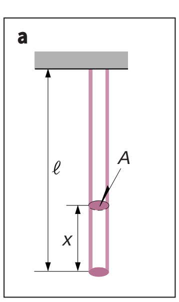
$$=\frac{\gamma^2Ax^2}{2\mathrm{E}}dx \qquad ①’$$

ここで求めたいのは丸棒全体に蓄えられるひずみエネルギだから，式①’を0〜ℓにわたって積分すればいい。

$$U=\int_0^\ell\frac{\gamma^2Ax^2}{2\mathrm{E}}dx$$

$$=\frac{\gamma^2A}{2\mathrm{E}}\int_0^\ell x^2dx$$

$$=\frac{\gamma^2A\ell^3}{6\mathrm{E}}$$



【演習27-3】本文中で求めた結果を使おう。つまり，次の式（11）だ。

$$\sigma=\sqrt{\left(\frac{Wv^2}{2\mathrm{g}}\right)\left(\frac{2\mathrm{E}}{A\ell}\right)} \qquad (11)$$

ただし，この式だけでは問題の高さは分からない。そこで式（11）の過程でも導いた，高さと速度の次の関係を使う。

$$h=\frac{v^2}{2\mathrm{g}}$$

両式よりhは次式。ここに問題に与えられた数値を代入して解けばいい。

$$h=\frac{\sigma^2A\ell}{2\mathrm{E}W}$$

$$=\frac{(200)^2\times400\times10^3}{2\times207\times10^3\times10^3}$$

$$=38.65\mathrm{mm}$$

【演習27-4】この問題はねじりを受けるケースだから，本文中の式（16）”を利用しよう。

$$U=\frac{T^2\ell}{2GI_p} \qquad (16)”$$

ここで，断面二次極モーメントI_pを求める。まず，中実丸棒から。断面二次極モーメントをI_{p1}とすると，本誌2000年6月号p.109の式（36）より，以下のように求めることができる（ここではあえて結果を使わずに，定義から求める。なお，結果，すなわち中実丸棒と中空丸棒の断面二次極モーメントは同p.110の表に掲載）。

$$I_{p1}=\int_A r^2dA$$

$$=\int_0^{\frac{d}{2}}r^2(2\pi rdr)$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{d}{2}}r^3dr$$

$$=\frac{\pi d^4}{32} \qquad ①$$

続いて，中空丸棒。外径をD，断面二次極モーメントをI_{p2}とする。上述の中実丸棒と同様に解くが，内径が外径Dの半分の中空ゆえに，積分範囲は$\frac{D}{4}\sim\frac{D}{2}$である点に注意する。

4月号演習問題解答

$$I_{p2}=\int_A r^2 dA$$

$$=\int_{\frac{D}{4}}^{\frac{D}{2}} r^2\,(2\pi r dr)$$

$$=2\pi\int_{\frac{D}{4}}^{\frac{D}{2}} r^3 dr$$

$$=2\pi\left(\frac{D^4}{64}-\frac{D^4}{1024}\right)$$

$$=\frac{15\pi D^4}{512} \qquad ②$$

さらに，中実丸棒のひずみエネルギをU1，中空丸棒のひずみエネルギをU2とすれば，問題の条件（同一材料である，蓄えられるひずみエネルギが同じである）と式(16)”より以下の関係が成り立つ。

$$U_1=U_2$$

$$\frac{T^2\ell}{2GI_{p1}}=\frac{T^2\ell}{2GI_{p2}}$$

$$I_{p1}=I_{p2}$$

この関係と式①②より，中空丸棒の外径Dは中実丸棒の外径dを用いて以下に示せる。

$$\frac{\pi d^4}{32}=\frac{15\pi D^4}{512}$$

$$D^4=\frac{512d^4}{32\times 15}$$

$$=\frac{16}{15}d^4$$

$$D=1.016d$$

【演習27-5】中実丸棒の長さをℓ，ひずみエネルギをU_1，最大せん断応力をτ_{max}とする。このときのひずみエネルギU_1は本文p.100で導き出した次式に従って解く。積分範囲は中実丸棒だから，$0\sim\frac{d}{2}$。

$$dU=udV=\frac{\tau_{max}^2 r_1^2}{2Gr^2}\times(2\pi r_1 dr_1\ell)$$

$$U_2=\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{\tau_{max}^2 r_1^2}{2G\left(\frac{d}{2}\right)^2}\times(2\pi r_1 dr_1\ell)$$

$$=\frac{4\tau_{max}^2\pi\ell}{Gd^2}\int_0^{\frac{d}{2}} r_1^3 dr_1$$

$$=\frac{\tau_{max}^2\pi d^2\ell}{16G} \qquad ①$$

次に，薄肉円管の直径を$2D$，肉厚をt，長さをL，ひずみエネルギをU_2，最大せん断応力をτ_{max}とする。中実丸棒と同じように計算するが，積分範囲は$D\sim D+t$だ。

$$dU=udV=\frac{\tau_{max}^2 r_1^2}{2Gr^2}\times(2\pi r_1 dr_1\ell)$$

$$U_2=\int_D^{D+t}\frac{\tau_{max}^2 r_1^2}{2GD^2}\times(2\pi r_1 dr_1 L)$$

$$=\frac{\tau_{max}^2\pi L}{GD^2}\int_D^{D+t} r_1^3 dr_1$$

$$=\frac{\tau_{max}^2\pi L}{4GD^2}\{(D+t)^4-D^4\}$$

$$=\frac{\tau_{max}^2\pi L}{4GD^2}\{(D+t)^2+D^2\}\{(D+t)^2-D^2\} \qquad ②$$

ここで，薄肉であることからDに対してtが小さいため，

$(D+t)^2+D^2 \quad 2D^2$

$(D+t)^2-D^2 \quad 2Dt$

と近似すると，式②は次になる。

$$U_2=\frac{\tau_{max}^2\pi L}{4GD^2}\{(D+t)^2+D^2\}\{(D+t)^2-D^2\}$$

$$=\frac{\tau_{max}^2\pi L}{4GD^2}\times 2D^2\times 2Dt$$

$$=\frac{\tau_{max}^2\pi LDt}{G} \qquad ②'$$

さらに，材料の同じ中実丸棒と薄肉円管の重量が等しい，すなわち体積が等しいことから，式②’中の右辺のLDtはdとℓを用いて表せる。

$$\frac{\pi d^2 \ell}{4} = 2\pi Dt \times L$$

$$LDt = \frac{d^2 \ell}{8}$$

これを式②’の右辺に代入する。

$$U_2 = \frac{\tau_{max}^2 \pi LDt}{G} = \frac{\tau_{max}^2 \pi}{G} \times \frac{d^2 \ell}{8} = \frac{\tau_{max}^2 \pi d^2 \ell}{8G} \quad ②”$$

以上，式①と式②”により，中実丸棒のひずみエネルギU_1と薄肉円管のひずみエネルギU_2の比は次のように求まる。

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\dfrac{\tau_{max}^2 \pi d^2 \ell}{16G}}{\dfrac{\tau_{max}^2 \pi d^2 \ell}{8G}} = \frac{1}{2}$$

【演習27-6】本文pp.100-101の例題そのものだから，考え方などは省略。結果は次の通りだ。

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{4GU}{\pi r^2 \ell}} = \sqrt{\frac{16GU}{\pi d^2 \ell}} = \sqrt{\frac{16 \times 79.6 \times 10^3 \times 4.368 \times 10^6}{\pi \times 25^2 \times 1000}}$$

$$= 1.683 \times 10^3 \mathrm{N/mm^2}$$

$$= 1.683\mathrm{GPa}$$

●第28章●

【演習28-1】本文中のヒントの通り，ABの中間に仮想荷重T（下向き）を考え，AB間とBC間の曲げモーメントM_xを求めていく。まずAB間。点B周りのモーメントの釣り合いから，点Aにおける反力R_Aは次の通り。

$$R_A \times \ell + T \times \frac{\ell}{2} = P \times a$$

$$R_A = \frac{Pa}{\ell} - \frac{T}{2}$$

これより，AB間の曲げモーメントM_xは次のように求まる（Aを原点に取り，左要素の右断面のモーメントの釣り合いを考えている）。

$$0 \leqq x < \frac{\ell}{2} : M_x = -R_A \times x = \left(\frac{T}{2} - \frac{Pa}{\ell}\right) x \quad ①$$

$$\frac{\ell}{2} \leqq x < \ell : M_x = -R_A \times x - T \times \left(x - \frac{\ell}{2}\right) = \left(\frac{T}{2} - \frac{Pa}{\ell}\right) x - T\left(x - \frac{\ell}{2}\right) = \left(-\frac{T}{2} - \frac{Pa}{\ell}\right) x + \frac{T\ell}{2} \quad ②$$

ここで本文中の式(23)に代入，ひずみエネルギを求めてもいいが，

$$dU = \int \frac{M_x^2}{2EI} dx \quad (23)$$

式(23)をあらかじめTで微分した方が楽だ。もちろん，その結果はカスチリアノの定理より，「**荷重点における荷重の作用方向の変位**」。すなわち荷重Tが作用するABの中間における変位，ここで求めたい値ということになる。

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \int \left(\frac{2M_x}{2EI}\right)\left(\frac{\partial M_x}{\partial T}\right) dx = \frac{1}{EI} \int M_x \left(\frac{\partial M_x}{\partial T}\right) dx \quad ③$$

AB間のひずみエネルギをU_1とすると，それは式③に式①と式②をそれぞれ代入し足し合わせたものだ。ただし積分範囲は，式①が$0 \sim \ell/2$，式②が$\ell/2 \sim \ell$。途中の計算は省くが，以下の結果となる。

4月号演習問題解答

$$\frac{\partial U_1}{\partial T}=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{T}{2}-\frac{Pa}{\ell}\right)x\times\frac{x}{2}\,dx$$
$$+\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left\{\left(-\frac{T}{2}-\frac{Pa}{\ell}\right)x+\frac{T\ell}{2}\right\}\times\left(-\frac{x}{2}+\frac{\ell}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(-\frac{Pa\ell^2}{16}+\frac{T\ell^3}{48}\right) \qquad ③'$$

ここで，本文中でも解説したように，実際には作用していない荷重Tをゼロとおけば，AB間における変位が求まる。

$$\frac{\partial U_1}{\partial T}=\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(-\frac{Pa\ell^2}{16}+\frac{0\times\ell^3}{48}\right) \qquad ③'$$
$$=-\frac{Pa\ell^2}{16\mathrm{E}I} \qquad ③''$$

式③”のマイナスは，想定荷重の作用方向と反対に変位が生じていることを表す。冒頭触れたように想定荷重Tは下向きとしたから，式③”の変位はその反対，すなわち上向きに発生していることになる。

なお，BC間のひずみエネルギU_2は仮想荷重Tに関係なく，本文で求めた通りだ。

$$U_2=\frac{P^2a^3}{6\mathrm{E}I}$$

この値をTで微分すれば，当然ゼロ。すなわち，先に求めた式③”が答え（ABの中間における変位）ということになる。

さて，もう一つの問題，「式（32）の結果を『たわみの重ね合わせ法』を利用して確かめよ」は，実は，本誌2000年10月号第17章の**【演習17-2】**と全く同じ。従って，10月号の演習問題解答を参照して頂きたい。

【演習28-2】本誌2000年12月号**【演習22-4】**でも解いたように，こうした「**曲がり片持ち梁**」は曲げとねじりを同時に受ける。そこで，**図b**に示した，角度θの位置にある丸棒の$Rd\theta$の微小部分の断面を考えよう。ここに生じる曲げモーメントM_θは，荷重Pに，荷重点と断面までの距離$R\sin\theta$（図中のa）をかけたもの。

$$M_\theta=P\times R\sin\theta \qquad ①$$

一方，ねじりトルクT_θは，荷重Pに，荷重点と断面までの垂直距離R（$1-\cos\theta$）〔図中のb〕をかけたものだ。

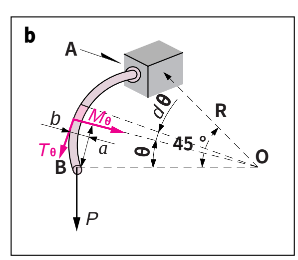
$$T_\theta=P\times R\,(1-\cos\theta) \qquad ②$$

荷重点におけるたわみを求めるには，曲げモーメントM_θとねじりトルクT_θによるひずみエネルギをそれぞれ計算し，その値を荷重点に作用する荷重Pで微分すればいい。ここで二つ注意しておく。一つは，ひずみエネルギを求める上述の式（23）のdxには$Rd\theta$が相当し，積分範囲は0～π/4であること。もう一つは，曲げモーメントによるひずみエネルギの計算はこれまで通り曲げ剛性EIを使うが，ねじりトルクによるひずみエネルギの計算にはねじり剛性GI_pを使用すること。では，一挙にいこう。まず，ひずみエネルギUから。

$$U=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{{M_\theta}^2}{2\mathrm{E}I}Rd\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{{T_\theta}^2}{2\mathrm{G}I_P}Rd\theta$$
$$=\frac{R}{2\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\pi}{4}}{M_\theta}^2d\theta+\frac{R}{2\mathrm{G}I_P}\int_0^{\frac{\pi}{4}}{T_\theta}^2d\theta$$
$$=\frac{R}{2\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(PR\sin\theta)^2d\theta$$
$$+\frac{R}{2\mathrm{G}I_P}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{PR(1-\cos\theta)\}^2d\theta$$
$$=\frac{P^2R^3}{2\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$+\frac{P^2R^3}{2\mathrm{G}I_P}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\frac{(\pi-2)P^2R^3}{16\mathrm{E}I}+\frac{(3\pi+2-8\sqrt{2})P^2R^3}{16\mathrm{G}I_P}$$

2番目の式から3番目の式への展開には式①②を利用した。また$\sin2\theta$と$\cos2\theta$の積分では2倍角の公式を用いた。上述した通り，このひずみエネルギの値を荷重点に作用する荷重Pで微分すればたわみが求まる。

$$\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{(\pi-2)PR^3}{8\mathrm{E}I}+\frac{(3\pi+2-8\sqrt{2})PR^3}{8\mathrm{G}I_P}$$



【演習28-3】欄外に注を入れておいたように，トラスの問題を解くにはまず各部材に作用する張力を求める必要がある。そこで**図c（a）**のように，ABの張力をT_1，BCの張力をT_2とおくと，鉛直方向の釣り合いは次式。

4月号演習問題解答

$T_1 \sin 30° = P$

$T_1 = 2P$　（引っ張り）　①

水平方向の釣り合いは次式となる。

$T_1 \cos 30° + T_2 = 0$

$$T_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} T_1$$

$$= -\sqrt{3}P \text{（マイナスだから圧縮）} \quad ②$$

2番目の式から3番目の式への展開は先に求めた式①を利用した。

こうした引っ張り・圧縮を受けるときのひずみエネルギは本文中の式(12)を利用する。

$$U = \frac{P^2 \ell}{2AE} \quad (12)$$

まず，ABの場合には，式(12)のPはT_1，ℓは$\dfrac{\ell}{\cos 30°}$，断面積はAだから，式①も利用しながら次になる。

$$U_{AB} = \frac{T_1^2 \dfrac{\ell}{\cos 30°}}{2AE}$$
$$= \frac{4P^2 \ell}{\sqrt{3}AE} \quad ③$$

同様に，BCの場合には，式(12)のPはT_2，ℓはℓ，断面積は$2A$だから，式②も利用しながら次のように計算できる。

$$U_{BC} = \frac{T_2^2 \ell}{2(2A)E}$$
$$= \frac{3P^2 \ell}{4AE} \quad ④$$

荷重点における変位δ_1を求めるには，式③④の各ひずみエネルギを荷重点に作用する荷重Pで微分すればいい。

$$\delta_1 = \frac{\partial U_{AB}}{\partial P} + \frac{\partial U_{BC}}{\partial P}$$
$$= \frac{8P\ell}{\sqrt{3}AE} + \frac{3P\ell}{2AE}$$
$$= \frac{(16\sqrt{3}+9)P\ell}{6AE}$$
$$6.12 \frac{P\ell}{AE}$$

次に，水平方向の変位。ただ，このままでは水平方向の変位は求められない。繰り返すが，カスチリアノの定理は，「荷重点における荷重の作用方向の変位」を計算する。この問題のように水平方向の変位を求めるには水平方向の荷重が必要だ。そこで【演習28-1】と同様，水平方向の仮想荷重Qを考える〔**図c (b)**〕。すると，鉛直方向の釣り合いの式は変わらずにABの張力T_1は式①の通りだが，水平方向の釣り合いについては次のようになる。

$T_1 \cos 30° + T_2 = Q$

$$T_2 = Q - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1$$
$$= Q - \sqrt{3}P \quad ⑤$$

2番目の式から3番目の式への展開は先に求めた式①を利用した。

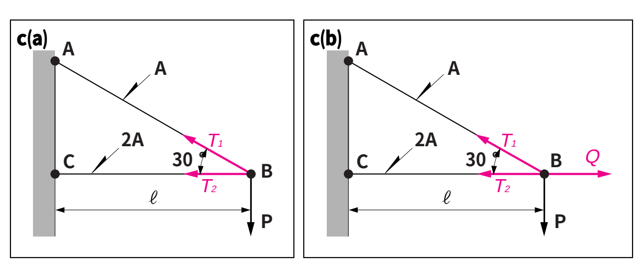
続いて，ひずみエネルギを求めるが，AB間のひずみエネルギU_{AB}の場合は先ほどと同様に式③。BC間のひずみエネルギの場合には式⑤から次のように計算できる。

$$U_{BC} = \frac{T_2^2 \ell}{2(2A)E}$$
$$= \frac{(Q-\sqrt{3}P)^2 \ell}{4AE} \quad ⑥$$

最後に，荷重点における変位δ_2を求めるには，式③⑥の各ひずみエネルギを荷重点に作用する荷重Qで微分すれば良い。

$$\delta_2 = \frac{\partial U_{AB}}{\partial Q} + \frac{\partial U_{BC}}{\partial Q} \quad ⑥$$
$$= 0 + \frac{2(Q-\sqrt{3}P)\ell}{4AE}$$
$$= \frac{(Q-\sqrt{3}P)\ell}{2AE}$$

ここで，仮想荷重Qは当然ゼロだから，水平方向の変位δ_2は結局次の通りだ。



4月号演習問題解答

$$\delta_2 = \frac{(Q-\sqrt{3}\,P)\ell}{2A\mathrm{E}} = \frac{(0-\sqrt{3}P)\ell}{2A\mathrm{E}} = -\frac{\sqrt{3}P\ell}{2A\mathrm{E}}$$

なお，符号のマイナスは，たわみが想定荷重と逆向き，つまりBC間の圧縮方向に生じていることを示している。

【演習28-4】もう何度も解いてきた通り，荷重点ではないところのたわみを求めるには，そこに想定荷重を与える。ここでは，先端Bに想定荷重Pを下向きにおく。すると，曲げモーメントM_xは，点Bからxを取り，右要素の左断面におけるモーメントの釣り合いから以下のように求まる。

$$0 \leqq x < \frac{\ell}{2} : M_x = -P\times x = -Px \quad ①$$

$$\frac{\ell}{2} \leqq x \leqq \ell : M_x = -P\times x - w\times\left(x-\frac{\ell}{2}\right)\times\frac{\left(x-\frac{\ell}{2}\right)}{2} = -Px-\frac{w}{2}\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2 \quad ②$$

式①②を，本文中の式（23）をあらかじめPで微分した式に代入し，一気に先端Bにおけるたわみを求める。まず，式（23）をPで微分する。

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \int\left(\frac{2M_x}{2\mathrm{E}I}\right)\left(\frac{\partial M_x}{\partial P}\right)dx = \frac{1}{\mathrm{E}I}\int M_x\left(\frac{\partial M_x}{\partial P}\right)dx \quad ③$$

ここに式①②を適用するが，積分範囲は，式①が$0\sim\frac{\ell}{2}$，式②が$\frac{\ell}{2}\sim\ell$。途中の計算は省くが，以下のように計算できる。

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\ell}{2}}(-Px)\times(-x)dx + \frac{1}{\mathrm{E}I}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left\{-Px-\frac{w}{2}\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2\right\}\times(-x)dx = \frac{P\ell^3}{3\mathrm{E}I}+\frac{7w\ell^4}{384\mathrm{E}I} \quad ③$$

最後に式③’の右辺のPを$P=0$とおけば，それが先端Bにおけるたわみδだ。

$$\delta = \frac{0\times\ell^3}{3\mathrm{E}I}+\frac{7w\ell^4}{384\mathrm{E}I} = \frac{7w\ell^4}{384\mathrm{E}I} \quad ③$$

この問題は，基本的には本誌2000年10月号p.110の**【演習16-2】**と同じ。あのときには面積モーメント法を用いて解いた。もう一度，比較しておくと良い。

【演習28-5】梁の中央に想定荷重Pを下向きにおく。点Aと点Bに作用する反力Rは，

$$2R = w\ell + P$$

$$R = \frac{w\ell+P}{2}$$

曲げモーメントM_xは，点Aからxを取り，左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いから以下のように求まる。

$$0 \leqq x < \frac{\ell}{2} : M_x = -wx\times\frac{x}{2}+R\times x = -\frac{wx^2}{2}+\frac{(w\ell+P)x}{2} \quad ①$$

$$\frac{\ell}{2} \leqq x \leqq \ell : M_x = -wx\times\frac{x}{2}+R\times x-P\times\left(x-\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{wx^2}{2}+\frac{(w\ell+P)x}{2}-P\left(x-\frac{\ell}{2}\right) \quad ②$$

式①②を，前述の**【演習28-4】**で求めた，一気にたわみを求める式③に代入する（前述の問題では先端Bのたわみを求めたが，ここでは想定荷重Pを中央に設定したため中央のたわみが計算できる）。

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \int\left(\frac{2M_x}{2\mathrm{E}I}\right)\left(\frac{\partial M_x}{\partial P}\right)dx = \frac{1}{\mathrm{E}I}\int M_x\left(\frac{\partial M_x}{\partial P}\right)dx \quad ③$$

ここに式①②を適用するが，積分範囲は，式①が$0\sim\frac{\ell}{2}$，式②が$\frac{\ell}{2}\sim\ell$。途中の計算は省くが，以下のように計算できる。

$$\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left\{-\frac{wx^2}{2}+\frac{(w\ell+P)x}{2}\right\}\times\frac{x}{2}dx$$
$$+\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left\{-\frac{wx^2}{2}+\frac{(w\ell+P)x}{2}-P\left(x-\frac{\ell}{2}\right)\right\}$$
$$\times\left(\frac{x}{2}-x+\frac{\ell}{2}\right)dx$$
$$=\frac{P\ell^3}{48\mathrm{E}I}+\frac{5w\ell^4}{384\mathrm{E}I} \qquad ③'$$

最後に式③’の$P=0$とおけば，それが先端Bにおけるたわみδだ。

$$\delta=\frac{0\times\ell^3}{48\mathrm{E}I}+\frac{5w\ell^4}{384\mathrm{E}I} \qquad ③$$
$$=\frac{5w\ell^4}{384\mathrm{E}I}$$

と，いつもの通り，ここまでは正攻法だ。ちょっと面倒だなあ，と思われている方も多いに違いない。そんな方には系の対称性を利用した解き方がお薦めだ。要は，梁の右端から中央までが蓄えるひずみエネルギと梁の左端から中央までが蓄えるひずみエネルギは等しいから，上述の式③'で，一方の積分だけを実行して2倍すれば良い。ここでは簡単な方，すなわち$0\sim\frac{\ell}{2}$の方を利用する。

$$\frac{\partial U}{\partial P}=2\times\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left\{-\frac{wx^2}{2}+\frac{(w\ell+P)x}{2}\right\}\times\frac{x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(\frac{5w\ell^4}{384}+\frac{P\ell^3}{48}\right)$$

ここに$P=0$を代入すれば，既に求めた答えと一致する。

この問題は，本誌2000年9月号pp.101～102で詳しく解説した例題2と同じだ。前回のようにたわみの微分方程式で解いても，今回のようにひずみエネルギで解いても，答えは当然一致。色々な解き方を学んで，解き方の“幅”を広げて欲しい。

【演習28-6】解き方は**【演習28-3】**と全く同じだ。**図d (a)**のように，ABの張力をT_1，BCの張力をT_2とおくと，鉛直方向の釣り合いは次式。

$$T_1\sin 30°=P+T_2\sin 30°$$
$$T_1=2P+T_2 \qquad ①$$

水平方向の釣り合いは次式となる。

$$T_1\cos 30°+T_2\cos 30°=0$$
$$T_1=-T_2 \qquad ②$$

式①②より，

$$T_1=P \quad （引っ張り） \qquad ③$$
$$T_2=-P \quad （マイナスだから圧縮） \qquad ③'$$

トラス全体のひずみエネルギは，AB間のひずみエネルギU_{AB}とBC間のひずみエネルギU_{BC}を足し合わせたもの。本文中の式（12）を利用し，次のように解ける。

$$U=U_{AB}+U_{BC}$$
$$=\frac{T_1^2\ell}{2A\mathrm{E}}+\frac{T_2^2\ell}{2(2A)\mathrm{E}}$$
$$=\frac{P^2\ell}{2A\mathrm{E}}+\frac{P^2\ell}{4A\mathrm{E}}$$
$$=\frac{3P^2\ell}{4A\mathrm{E}}$$

2番目の式から3番目の式への展開は式③③’を利用した。このトラス全体のひずみエネルギを荷重Pで微分すれば，鉛直方向のたわみδ_1が求まる。

$$\delta_1=\frac{\partial U}{\partial P}$$
$$=\frac{3P\ell}{2A\mathrm{E}}$$

次に，水平方向の変位。水平方向の仮想荷重Qを考えると〔**図d (b)**〕，鉛直方向の釣り合いの式は変わらないが（式①と同じだが），水平方向の釣り合いについては次のようになる。

$$T_1\cos 30°+T_2\cos 30°=Q \qquad ④$$

式①と式④より，T_1とT_2は次のように求まる。

$$T_1=\frac{\sqrt{3}Q+3P}{3} \qquad ⑤$$
$$T_2=\frac{\sqrt{3}Q-3P}{3} \qquad ⑤$$

あとは鉛直方向のときと同様，トラス全体のひずみを計算。今度は水平方向の荷重Qで微分する。

$$U=U_{AB}+U_{BC}$$
$$=\frac{T_1^2\ell}{2A\mathrm{E}}+\frac{T_2^2\ell}{2(2A)\mathrm{E}}$$
$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}Q+3P}{3}\right)^2\ell}{2A\mathrm{E}}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}Q-3P}{3}\right)^2\ell}{4A\mathrm{E}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}Q+3P)^2\ell}{18A\mathrm{E}}+\frac{(\sqrt{3}Q-3P)^2\ell}{36A\mathrm{E}}$$

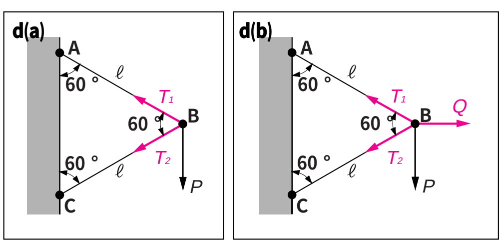
4月号演習問題解答

2番目の式から3番目の式への展開は式⑤⑤’を利用した。ここで，Qで微分してしまおう。

$$\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}Q+3P)\ell}{18AE}+\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}Q-3P)\ell}{36AE}$$
$$=\frac{6\sqrt{3}P\ell+18Q\ell}{36AE}$$

仮想荷重Qは当然ゼロだから，水平方向の変位δ_2は次の通りだ。

$$\delta_2=\frac{6\sqrt{3}P\ell+18Q\ell}{36AE}$$
$$=\frac{6\sqrt{3}P\ell+18\times 0\times \ell}{36AE}$$
$$=\frac{\sqrt{3}P\ell}{6AE}$$



【演習28-7】考え方は【演習28-2】の曲がり片持ち梁と同じ。ただしこの問題では曲げのみを考え，ねじりは考慮しなくてもいい。従って図eに示した，角度θのところにある$Rd\theta$の微小部分の断面には，荷重Pに，荷重点と断面までの距離Rsin θ（図中のa）をかけた，曲げモーメントM_θだけが生じる。

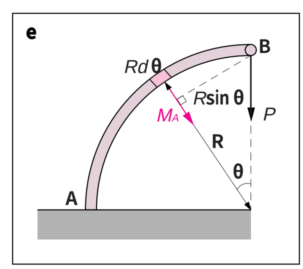
$$M_\theta=P\times R\sin\theta \qquad ①$$

あとは【演習28-2】と同様，ひずみエネルギを求め，それを荷重Pで微分して鉛直方向の変位を計算する。ただし，積分範囲は0～$\frac{\pi}{2}$だ。まず，ひずみエネルギUから。

$$U=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_\theta^2}{2EI}Rd\theta$$
$$=\frac{R}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}M_\theta^2 d\theta$$
$$=\frac{R}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(PR\sin\theta)^2 d\theta$$
$$=\frac{P^2R^3}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{\pi P^2R^3}{8EI}$$

2番目の式から3番目の式への展開には式①を，またsin2 θの積分には2倍角の公式を利用した。上述の通り，このひずみエネルギを荷重Pで微分すれば鉛直方向の変位が求まる。

$$\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{\pi PR^3}{4EI}$$



【演習28-8】問題の系の対称性から，支持点Aと支持点Bにおける反力は等しい。それをRとおくと，静力学的釣り合いからR_Cを用いて次のように表せる。

$$w\times 2\ell=R+R_C+R$$
$$R=w\ell-\frac{R_C}{2} \qquad ①$$

次に，曲げモーメントM_xを求める（xは点Aから取る）。

$$0 \leqq x < \ell : M_x = R \times x - wx \times \frac{x}{2}$$

$$= \left(w\ell - \frac{R_c}{2} \right) x - \frac{wx^2}{2} \quad ②$$

$$\ell \leqq x \leqq 2\ell : M_x = R \times x - wx \times \frac{x}{2} + R_c (x - \ell)$$

$$= \left(w\ell - \frac{R_c}{2} \right) x - \frac{wx^2}{2} + R_c (x - \ell)$$

$$= \left(w\ell + \frac{R_c}{2} \right) x - \frac{wx^2}{2} - R_c\ell \quad ③$$

ここで，本文中の式(23)をあらかじめR_Cで微分し，支点Cにおけるたわみの計算式を導入する。

$$U = \int_0^{2\ell} \frac{M_x^2}{2EI} dx \quad (23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_c} = \int_0^{2\ell} \frac{2M_x}{2EI} \left(\frac{\partial M_x}{\partial R_c} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{2\ell} M_x \left(\frac{\partial M_x}{\partial R_c} \right) dx \quad ④$$

この式④に式②③を代入する。積分範囲は，式②が0～ℓ，式③がℓ～2ℓだ。途中の計算は省くが，以下の結果となる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_c} = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left\{ \left(w\ell - \frac{R_c}{2} \right) x - \frac{wx^2}{2} \right\} \times \left(-\frac{x}{2} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_{\ell}^{2\ell} \left\{ \left(w\ell + \frac{R_c}{2} \right) x - \frac{wx^2}{2} - R_c\ell \right\} \times \left(\frac{x}{2} - \ell \right) dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \left(\frac{R_c\ell^3}{3} - \frac{5w\ell^4}{12} \right) \quad ④'$$

当然，ここで求めた支点Cにおけるたわみはゼロだ。従って敷き④’をゼロとする方程式を作れば，問題のR_Cを求めることができる。

$$\frac{1}{2EI} \left(\frac{R_c\ell^3}{3} - \frac{5w\ell^4}{12} \right) = 0$$

$$R_c = \frac{5w\ell}{4}$$

【演習28-9】まず，支持点B周りのモーメントの釣り合いから，支持点Aにおける反力R_Aを求めよう（R_Cを用いて表そう）。

$$R_A \times 2\ell + R_c \times \ell = w\ell \times \frac{3\ell}{2}$$

$$R_A = \frac{3w\ell}{4} - \frac{R_c}{2} \quad ①$$

次に，曲げモーメントM_xを求める（xは点Aから取る）。

$$0 \leqq x < \ell : M_x = R_A \times x - wx \times \frac{x}{2}$$

$$= \left(\frac{3w\ell}{4} - \frac{R_c}{2} \right) x - \frac{wx^2}{2} \quad ②$$

$$\ell \leqq x \leqq 2\ell : M_x = R_A \times x - w\ell \left(x - \frac{\ell}{2} \right) + R_c (x - \ell)$$

$$= \left(\frac{3w\ell}{4} - \frac{R_c}{2} \right) x - w\ell \left(x - \frac{\ell}{2} \right) + R_c (x - \ell)$$

$$= \left(\frac{R_c}{2} - \frac{w\ell}{4} \right) x + \frac{w\ell^2}{2} - R_c\ell \quad ③$$

上述の問題と同様，本文中の式(23)をあらかじめR_Cで微分，支点Cにおけるたわみの計算式を導入する。

$$U = \int_0^{2\ell} \frac{M_x^2}{2EI} dx \quad (23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_c} = \int_0^{2\ell} \frac{2M_x}{2EI} \left(\frac{\partial M_x}{\partial R_c} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{2\ell} M_x \left(\frac{\partial M_x}{\partial R_c} \right) dx \quad ④$$

この式④に式②③を代入する。積分範囲は，式②が0～ℓ，式③がℓ～2ℓだ。途中の計算は省くが，以下の結果となる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_c} = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left\{ \left(\frac{3w\ell}{4} - \frac{R_c}{2} \right) x - \frac{wx^2}{2} \right\} \times \left(-\frac{x}{2} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_{\ell}^{2\ell} \left\{ \left(\frac{R_c}{2} - \frac{w\ell}{4} \right) x + \frac{w\ell^2}{2} - R_c\ell \right\} \times \left(\frac{x}{2} - \ell \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{R_c\ell^3}{6} - \frac{5w\ell^4}{48} \right) \quad ④$$

ここでも，求めた支点Cにおけるたわみはゼロ。従って式④’をゼロとする方程式を作れば，問題のR_Cが計算できる。

4月号演習問題解答

$$\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(\frac{R_c\ell^3}{6}-\frac{5w\ell^4}{48}\right)=0$$

$$R_c=\frac{5w\ell}{8}$$

【演習28-10】系の対称性から両端における曲げモーメントと反力は等しいため，**図f**に示すように固定端AとBにおける曲げモーメントMと反力Rを仮定する。静力学的釣り合いから，反力は集中荷重Pを用いて次のように表せる。

$$R+R=P$$

$$R=\frac{P}{2} \qquad ①$$

次に，曲げモーメントM_xを求める（xは点Aから取る）。

$$0\leqq x<\frac{\ell}{2}:M_x=R\times x-M$$

$$=\frac{Px}{2}-M \qquad ②$$

$$\frac{\ell}{2}\leqq x\leqq\ell:M_x=R\times x-M-P\left(x-\frac{\ell}{2}\right)$$

$$=\frac{Px}{2}-M-P\left(x-\frac{\ell}{2}\right)$$

$$=-\frac{Px}{2}-M+\frac{P\ell}{2} \qquad ③$$

ここでは，本文中の式(23)をMで微分，固定端A（固定端Bも同様）におけるたわみの計算式を導入する。

$$U=\int_0^{\ell}\frac{{M_x}^2}{2\mathrm{E}I}\,dx \qquad (23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial M}=\int_0^{\ell}\frac{2M_x}{2\mathrm{E}I}\left(\frac{\partial M_x}{\partial M}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\ell}M_x\left(\frac{\partial M_x}{\partial M}\right)dx \qquad ④$$

この式④に式②③を代入する。積分範囲は，式②が$0\sim\frac{\ell}{2}$，式③が$\frac{\ell}{2}\sim\ell$。途中の計算は省くが，以下の結果となる。

$$\frac{\partial U}{\partial M}=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{Px}{2}-M\right)\times(-1)dx$$

$$+\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left(-\frac{Px}{2}-M+\frac{P\ell}{2}\right)\times(-1)dx$$

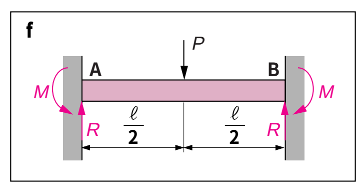
$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(M\ell-\frac{P\ell^2}{8}\right) \qquad ④$$

求めた固定端A（固定端Bも同様）におけるたわみはゼロだから，式④’をゼロとする方程式を作ればMが分かる。

$$\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(M\ell-\frac{P\ell^2}{8}\right)=0$$

$$M=\frac{P\ell}{8}$$

この不静定梁の問題は，基本的には本誌2000年11月p.99の【演習18-1】と同じ。以前は，集中荷重だけが作用するケースと曲げモーメントだけが作用するケースに分けて解いた。改めて，解き方を比較しておいて欲しい。



【演習28-11】まず，支持点Bにおける反力R_Bを未知として考え，曲げモーメントM_xを求める（xは点Bから取るため，ここでは右要素の左断面のモーメントの釣り合いを考える）。

$$0\leqq x<\frac{\ell}{2}:M_x=R_B\times x$$

$$=R_Bx \qquad ①$$

$$\frac{\ell}{2}\leqq x<\ell:M_x=R_B\times x-w\left(x-\frac{\ell}{2}\right)\times\frac{\left(x-\frac{\ell}{2}\right)}{2}$$

$$=R_Bx-\frac{w}{2}\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2 \qquad ②$$

本文中の式(23)をあらかじめR_Bで微分，支持点Bにおけるたわみの計算式を導入する。

$$U=\int_0^{\ell}\frac{{M_x}^2}{2\mathrm{E}I}dx \qquad (23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_B}=\int_0^{\ell}\frac{2M_x}{2\mathrm{E}I}\left(\frac{\partial M_x}{\partial R_B}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\ell}M_x\left(\frac{\partial M_x}{\partial R_B}\right)dx \qquad ③$$

4月号演習問題解答

この式③式①②を代入する。積分範囲は，式①が$0\sim\dfrac{\ell}{2}$，式②が$\dfrac{\ell}{2}\sim\ell$。途中の計算は省くが，以下の結果となる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B}=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\ell}{2}}R_B x\times xdx$$
$$+\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left\{R_B x-\frac{w}{2}\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2\right\}\times xdx$$
$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(\frac{R_B\ell^3}{3}-\frac{7w\ell^4}{384}\right)\quad ③$$

求めた支持点Bにおけるたわみはゼロ。従って式③’をゼロとする方程式を作れば，未知のR_Bが計算できる。

$$\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(\frac{R_B\ell^3}{3}-\frac{7w\ell^4}{384}\right)=0$$
$$R_B=\frac{7w\ell}{128}$$

次に，固定端A周りのモーメントの釣り合いから，曲げモーメントM_Aを求める。

$$M_A+R_B\times\ell=w\times\frac{\ell}{2}\times\frac{\ell}{4}$$
$$M_A=-R_B\ell+\frac{w\ell^2}{8}$$
$$=-\frac{7w\ell^2}{128}+\frac{w\ell^2}{8}$$
$$=\frac{9w\ell^2}{128}$$

この問題も以前解いている。本誌2000年11月p.100の【演習18-4】だ。上述の問題と併せて，是非復習しておこう。

【演習28-12】先の**【演習28-11】**とは逆に，曲げモーメントM_Aを未知として求めてみる。この場合にはxは点Aから取り，曲げモーメントM_xを計算する。その際，点Aの反力が必要。図gのように曲げモーメントM_Aと反力Rを仮定すると，点B周りのモーメントの釣り合いから，反力Rが次のように求まる。

$$M_A+w\times\frac{\ell}{2}\times\frac{3\ell}{4}=R\times\ell$$
$$R=\frac{M_A}{\ell}+\frac{3w\ell}{8}\quad ①$$

次に，曲げモーメントM_xを求める（繰り返すが，xは点Aから取る）。

$$0\leqq x<\frac{\ell}{2}：M_x=-M_A+R\times x-wx\times\frac{x}{2}$$
$$=-M_A+\left(\frac{M_A}{\ell}+\frac{3w\ell}{8}\right)x-\frac{wx^2}{2}$$
$$\frac{\ell}{2}\leqq x\leqq\ell：M_x=-M_A+R\times x-w\times\frac{\ell}{2}\times\left(x-\frac{\ell}{4}\right)$$
$$=-M_A+\left(\frac{M_A}{\ell}+\frac{3w\ell}{8}\right)x$$
$$-\frac{w\ell}{2}\left(x-\frac{\ell}{4}\right)\quad ③$$

この問題では，本文中の式（23）をM_Aで微分，固定端Aにおけるたわみの計算式を導入する。

$$U=\int_0^{\ell}\frac{M_x^2}{2\mathrm{E}I}dx\quad (23)$$
$$\frac{\partial U}{\partial M_A}=\int_0^{\ell}\frac{2M_x}{2\mathrm{E}I}\left(\frac{\partial M_x}{\partial M_A}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\ell}M_x\left(\frac{\partial M_x}{\partial M_A}\right)dx\quad ④$$

この式④に式②③を代入する。積分範囲は，式②が$0\sim\dfrac{\ell}{2}$，式③が$\dfrac{\ell}{2}\sim\ell$。途中の計算は省くが，以下の結果となる（多少面倒臭いが力づくで解こう）。

$$\frac{\partial U}{\partial M_A}=\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left\{-M_A+\left(\frac{M_A}{\ell}+\frac{3w\ell}{8}\right)x-\frac{wx^2}{2}\right\}$$
$$\times\left(-1+\frac{x}{\ell}\right)dx$$
$$+\frac{1}{\mathrm{E}I}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left\{-M_A+\left(\frac{M_A}{\ell}+\frac{3w\ell}{8}\right)x\right.$$
$$\left.-\frac{w\ell}{2}\left(x-\frac{\ell}{4}\right)\right\}\left(-1+\frac{x}{\ell}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(\frac{M_A\ell}{3}-\frac{3w\ell^3}{128}\right)\quad ④$$

求めた固定端Aにおけるたわみはゼロだから，式④’をゼロとする方程式を作ればM_Aが分かる。

$$\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(\frac{M_A\ell}{3}-\frac{3w\ell^3}{128}\right)=0$$
$$M_A=\frac{9w\ell^2}{128}$$

先の演習問題の答えと一致。もちろん，点Aまわりのモーメントの釣り合いから，点Bにおける反力R_Bが計算できる。

4月号演習問題解答

$$M_A + R_B \times \ell = w \times \frac{\ell}{2} \times \frac{\ell}{4}$$

$$R_B = -\frac{M_A}{\ell} + \frac{w\ell}{8}$$

$$= -\frac{9w\ell}{128} + \frac{w\ell}{8}$$

$$= \frac{7w\ell}{128}$$

当然，先の演習問題の答えと一致する。