# 10月号演習問題解答

## ●第16章●

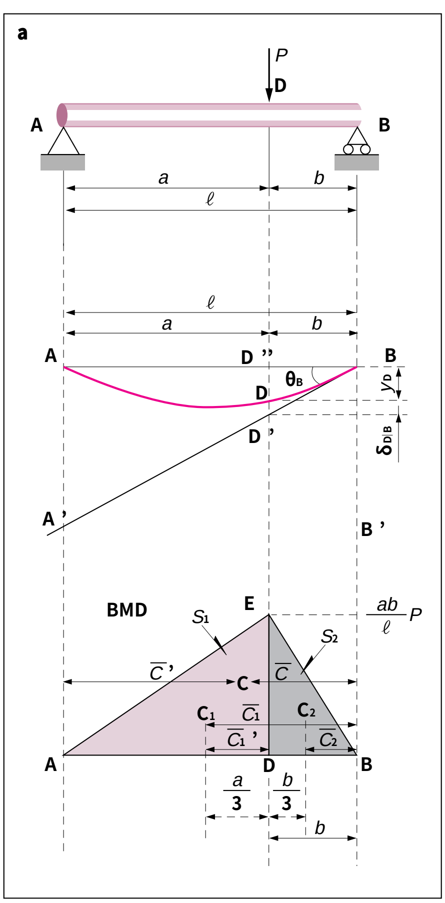
【**演習16-1**】考え方は例題2と変わらない。次の関係を利用する（**下図**）。

$y_D = \mathrm{DD''} - \mathrm{DD'}$ ①

ただし，D’は，支持点Aのたわみ角$\theta_A$を使う場合と支持点Bのたわみ角$\theta_B$を使う場合で異なる。後者の場合には，D’は点Bの接線に対して点Dの変位した位置になる（**図a**）。すると，式①は次のように書き換えることができる。

$y_D = b \times \theta_B - \delta_{D|B}$ ①’

ここで，$\delta_{D|B}$は「**Bの接線に対するDの変位量**」で，「**図心の基準点を点D，領域を点Dから点BとするBMD（三角形BDE）**」を対象とする。従って$\delta_{D|B}$を計算するには，指定された領域の（**BMDの面積**）と基準点である点Dから（**図心までの距離**）をかけて，（**梁の曲げ剛性E*I***）で割れば良い。例題2の結果から，




（三角形BEDの面積）$= S_2 = \dfrac{Pab^2}{2\ell}$

（点Dと図心の距離）$= \dfrac{b}{3}$

だから，

$$\delta_{D|B} = \frac{\dfrac{Pab^2}{2\ell} \times \dfrac{b}{3}}{\mathrm{E}I}$$

$$= \frac{Pab^3}{6\ell \mathrm{E}I} \quad ②$$

式②と例題2で求めた$\theta_B$を用いると，式①’は次の通り，前回の結果である式(22)と一致する。

$$y_D = b \times \theta_B - \delta_{D|B}$$

$$= b \times \frac{Pab(\ell + a)}{6\ell \mathrm{E}I} - \frac{Pab^3}{6\ell \mathrm{E}I}$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{3\ell \mathrm{E}I}$$

【**演習16-2**】面積モーメント法を使って解くから，何はさておきBMDだ。先端Aから距離$x$までの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考える。まず，$0 \leqq x < b$。

$M_x = 0$

次に，$b \leqq x \leqq \ell$。

$$M_x = -\frac{w(x-b)^2}{2}$$

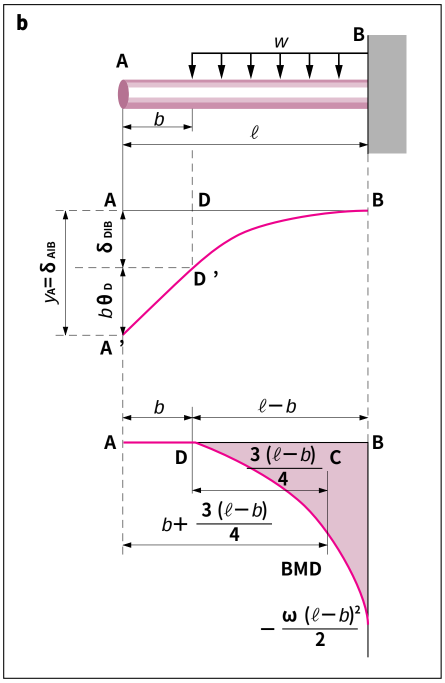
以上の結果から，BMDは**図b**になる。

梁の先端Aのたわみを$y_A$とおくと，2通りの求め方がある。一つは，変形を受ける領域（等分布荷重が作用している領域＝DBとする）と変形を受けない領域，言い換えれば斜めにただ傾いているだけの領域（残りの領域＝ADとする）に分けるやり方だ。この場合，$y_A$を出すには，変形を受ける領域の変形分DD’（$= \delta_{D|B}$）と変形を受けない領域の傾いた分を足し合わせる必要がある。

$y_A = \delta_{D|B} + b\,\theta_D$ ①

式①の右辺の第二項目が傾いた分。$\theta_D$は点Dの接線と点Bの接線のなす角。ただし，片持ち梁の場合には固定端である点Bの接線の傾きはゼロだから，結果的に$\theta_D$は点Dの接線の傾き，もっといえば点Dから点Aの領域の梁の傾きと等しくなる。従って，$\theta_D$にADの長さである$b$を

# 10月号演習問題解答




かけた値が点Dから点Aまでの傾いた分になる。あとは，解くだけ。式①の第一項目，$\delta_{D|B}$から。

$\delta_{D|B}$は，図心の基準点を点D，領域を点D〜点Bとするる BMD，ちょうど放物線の部分だけを対象とする。その面積と図心までの距離は本誌10月号p.105の表の値を参考に求めよう。

$$（放物線の面積）=\frac{w(\ell-b)^3}{6}$$

$$（点Dと図心の距離）=\frac{3(\ell-b)}{4}$$

$$\delta_{D|B}=\frac{\dfrac{w(\ell-b)^3}{6}\times\dfrac{3(\ell-b)}{4}}{EI}$$

$$=-\frac{w(\ell-b)^4}{8EI} \qquad ②$$

次に第二項目，$b\,\theta_D$。$\theta_D$は点Dの接線と点Aの接線のなす角になるため，BMDは点Dから点Aの領域（放物線の部分）を対象にする。

$$（放物線の面積）=\frac{w(\ell-b)^3}{6}$$

$$\theta_D=\frac{w(\ell-b)^3}{6EI}$$

従って，

$$b\,\theta_D=\frac{wb(\ell-b)^3}{6EI} \qquad ③$$

以上，式①より，式②の右辺と式③の右辺を足し合わせれば，点Aのたわみ$y_A$が求まる。

$$y_A=\frac{w(\ell-b)^4}{8EI}+\frac{wb(\ell-b)^3}{6EI}$$

$$=\frac{w(\ell-b)^3(3\ell+b)}{24EI}$$

このように分解していく解き方は“思考の訓練”になるものの，実践的には素直に，

$y_A=\delta_{A|B}$

と考えた方が楽だ。これが，もう一つの解き方である。

$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点Bとする BMDが対象。面積は結局$\delta_{D|B}$のときと変わらず放物線の部分だが，図心までの距離は基準点Aから測る。従って，

$$（点Aと図心の距離）=b+\frac{3(\ell-b)}{4}$$

これと，先に求めた（放物線の面積）を利用して$y_A$，すなわち$\delta_{A|B}$を解くと当然，先ほどの答えと一致する。

$$y=\delta_{A|B}=\frac{\dfrac{w(\ell-b)^3}{6}\times\left\{b+\dfrac{3(\ell-b)}{4}\right\}}{EI}$$

$$=\frac{w(\ell-b)^3(3\ell+b)}{24}$$

**【演習16-3】**先端Aから距離$x$までの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考える。

$M_x=M$

従って，BMDは**図c**になる。

先端Aのたわみを$y_A$とすれば，$\delta_{A|B}$，すなわち点Bの接線に対する点Aの変位量として表せる。くどいようだが，片持ち梁の固定端Bの接線は，変形前の片持ち梁の軸と一致するからだ。

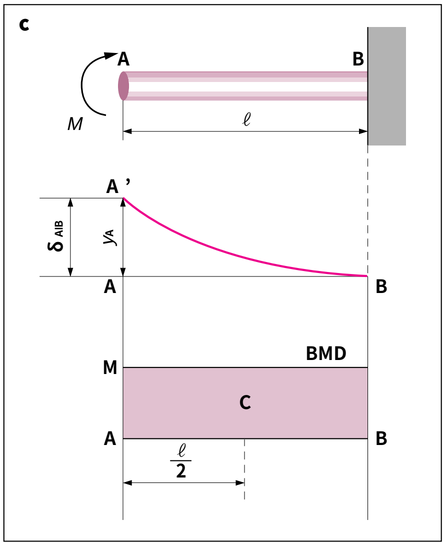
$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点Bとする BMD，すなわち**図b**の長方形全体を対象とする。

$$（長方形の面積）=M\ell$$

$$（点Aと図心の距離）=\frac{\ell}{2}$$

従って，

# 10月号演習問題解答




$$y_A = \delta_{A|B} = \frac{M\ell \times \frac{\ell}{2}}{EI} = \frac{M\ell^2}{2EI}$$

一方，たわみ角（$\theta_A$とおく）も，面積モーメント法を利用して解く。ただし面積モーメント法で計算する角度，具体的には（BMDの面積）を（曲げ剛性E$I$）で割った値は，二つの接線のなす角。このため固定端Bの接線（変形前の片持ち梁の軸と一致）と点Aの接線のなす角を求めれば，いわゆる点Aのたわみ角と等価になる。従って，ここではBMDは点Aから点Bまでの全領域を対象とする。

（長方形の面積）$= M\ell$

$$\theta_A = \frac{M\ell}{EI}$$

**【演習16-4】**先端Aから距離$x$までの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考える。まず，$0 \leqq x < \ell - a$。

$M_x = 0$

次に，$\ell - a \leqq x \leqq \ell$。

$M_x = -Px + P(\ell - a)$

以上の結果から，BMDは**図d**になる。

梁の先端Aのたわみを$y_A$とおくと，演習16-2と同様，2通りの求め方があるが，ここでは慣れてきたところで実務的に，

$y_A = \delta_{A|B}$

と考える解き方を使う。結局，$\delta_{A|B}$を求めるから，図心の基準点を点A，領域を点Aから点BとするBMD，すなわちBMD全領域を対象とする。

$$(\text{BMDの面積}) = \frac{Pa^2}{2}$$

$$(\text{点Dと図心の距離}) = (\ell - a) + \frac{2a}{3} = \ell - \frac{a}{3}$$

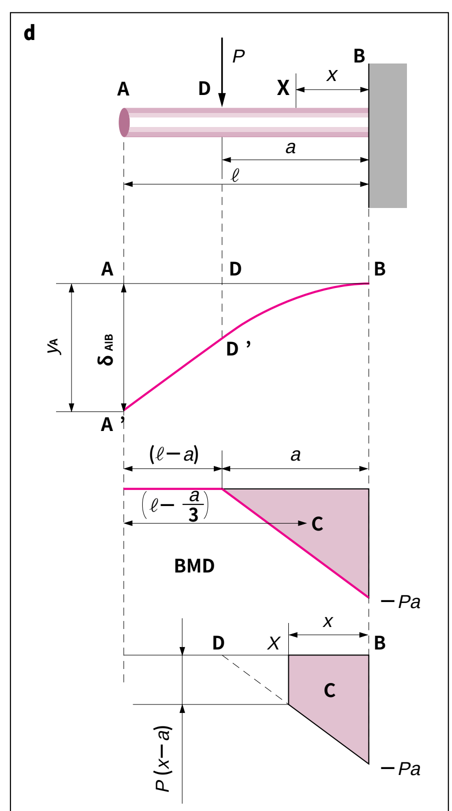
従って，

$$\delta_{A|B} = y_A = \frac{\frac{Pa^2}{2} \times \left(\ell - \frac{a}{3}\right)}{EI} = \frac{Pa^2(3\ell - a)}{6EI}$$

たわみ角$\theta_A$については演習16-3と同様，点Aから点B（全領域）を対象とするBMDの面積から求められる。

$$\theta_A = \frac{Pa^2}{2EI}$$

また，点Xにおけるたわみは$\delta_{X|B}$（点Bの接線に対する



# 10月号演習問題解答

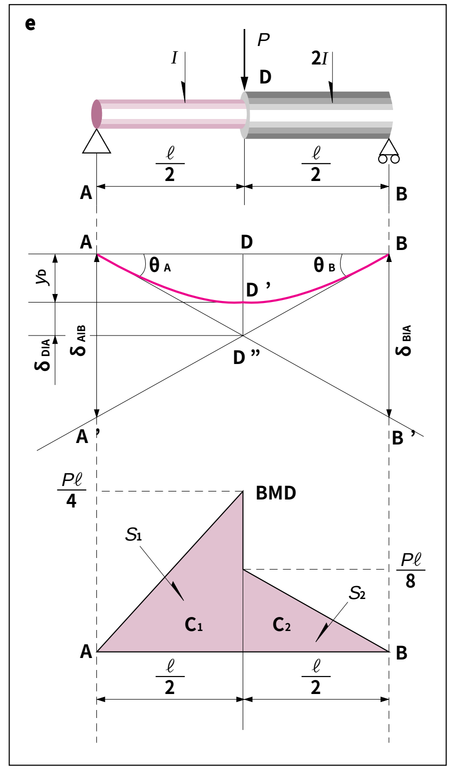
点Xの変位量）と等価になる。$\delta_{X|B}$は，図心の基準点を点X，領域を点Xから点BとするBMD，すなわち**図d**の最後に示した台形。その面積と図心までの距離は本誌10月号p.105の**表**を参考に求める（台形は多少面倒な感じを受けるが，実際にはそう難しくない。早く慣れて欲しい）。

$$（台形の面積）= \frac{x\left\{P(a-x)+Pa\right\}}{2} = \frac{Px(2a-x)}{2}$$

$$（点Xと図心の距離）= x - \frac{x\left\{2P(a-x)+Pa\right\}}{3\left\{P(a-x)+Pa\right\}} = \frac{x(3a-x)}{3(2a-x)}$$

従って，点Xにおけるたわみは$\delta_{X|B}$は次の結果となる。

$$\delta_{X|B} = \frac{\dfrac{Px(2a-x)}{2} \times \dfrac{x(3a-x)}{3(2a-x)}}{EI} = \frac{Px^2(3a-x)}{6EI}$$




【演習16-5】先端Aから距離$x$までの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考えるが，最初に点Aの反力$R_A$を点Bまわりのモーメントの釣り合いから求めておく。

$$R_A \times \ell = P \times \frac{\ell}{2}$$

$$R_A = \frac{P}{2}$$

反力を出したら，$0 \leqq x < \dfrac{\ell}{2}$の範囲の，左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考える。

$$M_x = R_A \times x = \frac{Px}{2}$$

次に，$\dfrac{\ell}{2} \leqq x \leqq \ell$だが，曲げ剛性を$EI$として考えると，

$$M_x = R_A \times x - P \times \left(x - \frac{\ell}{2}\right) = -\frac{Px}{2} + \frac{P\ell}{2}$$

実際には曲げ剛性$2EI$だから，曲げモーメントは半分。

$$M_x = -\frac{Px}{4} + \frac{P\ell}{4}$$

以上の結果から，BMDは**図e**になる。

点Aのたわみ角を$\theta_A$，点Bのたわみ角を$\theta_B$とおく。まず，$\theta_A$は，点Aの接線に対する点Bの変位量BB'（$=\delta_{B|A}$）を用いて，次のように表せる。

$$\theta_A = \frac{BB'}{\ell} = \frac{\delta_{B|A}}{\ell}$$

$\delta_{B|A}$は，図心の基準点を点B，領域を点Bから点AとするBMD，すなわちBMD全領域を対象とする。左の三角形の面積を$S_1$，図心を$C_1$（点Bと図心の距離を$\overline{C}_1$），右の三角形の面積を$S_2$，図心を$C_2$（点Bと図心の距離を$\overline{C}_2$）とおくと，対象とする（BMDの面積）と（点Bと図心の距離）は以下になる。

$$（BMDの面積）= S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{P\ell}{4} \times \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{P\ell}{8} \times \frac{\ell}{2} = \frac{3P\ell^2}{32}$$

$$（点Bと図心の距離）= \frac{S_1 \times \overline{C}_1 + S_2 \times \overline{C}_2}{(S_1 + S_2)} = \frac{\dfrac{P\ell^2}{16} \times \dfrac{2\ell}{3} + \dfrac{P\ell^2}{32} \times \dfrac{\ell}{3}}{\dfrac{3P\ell^2}{32}}$$

$$=\frac{5\ell}{9}$$

従って$\delta_{\mathrm{B|A}}$，さらに$\theta_A$は次のように計算できる。

$$\delta_{\mathrm{B|A}}=\frac{\frac{3P\ell^2}{32}\times\frac{5\ell}{9}}{\mathrm{E}I}=\frac{5P\ell^3}{96\mathrm{E}I}$$

$$\theta_A=\frac{\frac{5P\ell^3}{96\mathrm{E}I}}{\ell}=\frac{5P\ell^2}{96\mathrm{E}I}$$

点Bのたわみ角$\theta_B$も全く同様に求めることができるが，ここでは点Bの接線に対する点Aの変位量AA’（＝$\delta_{\mathrm{A|B}}$）を用いる。

$$\theta_B=\frac{\mathrm{AA'}}{\ell}=\frac{\delta_{\mathrm{A|B}}}{\ell}$$

$\delta_{\mathrm{A|B}}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点BとするBMDを対象とする。従って，上述の$\theta_A$のときとは（BMDの面積）は等しいが，図心の基準点が異なる。点Aから測定するから，

$$（点Aと図心の距離）=\ell-（点Bと図心の距離）=\ell-\frac{5\ell}{9}=\frac{4\ell}{9}$$

従って$\delta_{\mathrm{A|B}}$，さらに$\theta_B$は次のように求められる。

$$\delta_{\mathrm{A|B}}=\frac{\frac{3P\ell^2}{32}\times\frac{4\ell}{9}}{\mathrm{E}I}=\frac{P\ell^3}{24\mathrm{E}I}$$

$$\theta_B=\frac{\frac{P\ell^3}{24\mathrm{E}I}}{\ell}=\frac{P\ell^2}{24\mathrm{E}I}$$

続いて，点Dにおけるたわみを$y_D$とおく。点Aのたわみ角$\theta_A$，点Bのたわみ角$\theta_B$のどちらを用いても解けるが，ここでは$\theta_A$を使う。点Aの接線に対する点Dの変位量をD’D”とすると，**図e**の通り，$y_D$は次式となる。

$$y_D=\mathrm{DD''}-\mathrm{D'D''}=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{\mathrm{D|A}}$$

この式の第二項目，$\delta_{\mathrm{D|A}}$は，図心の基準点を点D，領域を点Dから点AとするBMD，すなわち左側の三角形だ。

$$（左側の三角形の面積）=S_1=\frac{P\ell^2}{16}$$

$$（点Dと図心の距離）=\frac{\ell}{6}$$

従って，

$$\delta_{\mathrm{D|A}}=\frac{\frac{P\ell^2}{16}\times\frac{\ell}{6}}{\mathrm{E}I}=\frac{P\ell^3}{96\mathrm{E}I}$$

この結果と既に求めた$\theta_A$から，$y_D$は次のように求まる。

$$y_D=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{\mathrm{D|A}}=\frac{5P\ell^2}{96\mathrm{E}I}\times\frac{\ell}{2}-\frac{P\ell^3}{96\mathrm{E}I}=\frac{3P\ell^3}{192\mathrm{E}I}=\frac{P\ell^3}{64\mathrm{E}I}$$

もちろん，点Bのたわみ角を使っても結果は同じだ。できるだけ，確かめるようにしておこう。

**【演習16-6】**先端Aから距離$x$までの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考えるが，最初に点Aの反力$R_A$を点Bまわりのモーメントの釣り合いから求めておく。

$$R_A\times\ell=M_B$$

$$R_A=\frac{M_B}{\ell}$$

左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いは，

$$M_x=R_A\times x=\frac{M_Bx}{\ell}$$

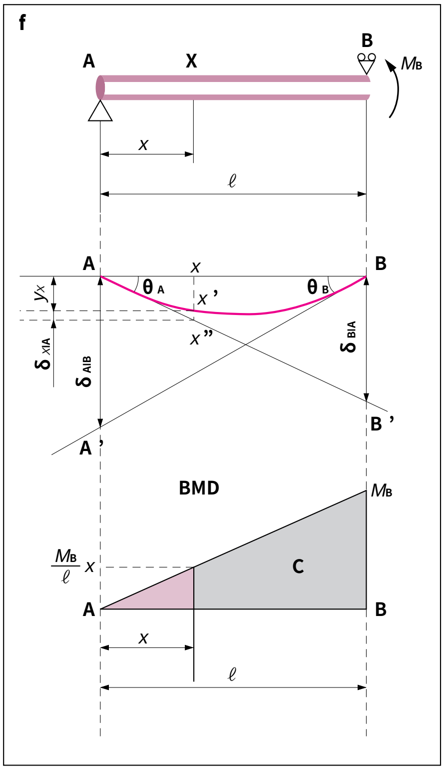
従って，BMDは**図f**になる。

点Aのたわみ角を$\theta_A$，点Bのたわみ角を$\theta_B$とすれば，演習16-5と同様に求めることができる。まず$\theta_A$は，点Aの接線に対する点Bの変位量BB’（＝$\delta_{\mathrm{B|A}}$）を用いて，次のように表せる。

$$\theta_A=\frac{\mathrm{BB'}}{\ell}=\frac{\delta_{\mathrm{B|A}}}{\ell}$$

$\delta_{\mathrm{B|A}}$は，図心の基準点を点B，領域を点Bから点Aとする BMD，すなわち三角形の全領域を対象とする。

# 10月号演習問題解答




$$(\text{三角形の面積})=\frac{M_B\ell}{2}$$

$$(\text{点Bと図心の距離})=\frac{\ell}{3}$$

従って，$\delta_{B|A}$，さらに$\theta_A$は次のように求められる。

$$\delta_{B|A}=\frac{\frac{M_B\ell}{2}\times\frac{\ell}{3}}{EI}=\frac{M_B\ell^2}{6EI}$$

$$\theta_A=\frac{\frac{M_B\ell^2}{6EI}}{\ell}=\frac{M_B\ell}{6EI}$$

次に$\theta_B$は，点Bの接線に対する点Aの変位量AA'（$=\delta_{A|B}$）を用いる。

$$\theta_B=\frac{AA'}{\ell}=\frac{\delta_{A|B}}{\ell}$$

$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点Bとする BMDを対象とする。従って，上述の$\theta_A$のときとは（BMDの面積）は等しいが，図心の基準点が異なる。点Aから測定するから，

$$(\text{点Aと図心の距離})=\ell-(\text{点Bと図心の距離})=\ell-\frac{\ell}{3}=\frac{2\ell}{3}$$

従って$\delta_{A|B}$，さらに$\theta_B$は次のように求められる。

$$\delta_{A|B}=\frac{\frac{M_B\ell}{2}\times\frac{2\ell}{3}}{EI}=\frac{M_B\ell^2}{3EI}$$

$$\theta_B=\frac{\frac{M_B\ell^2}{3EI}}{\ell}=\frac{M_B\ell}{3EI}$$

続いて，点Xにおけるたわみを$y_x$とおく。点Aのたわみ角$\theta_A$，点Bのたわみ角$\theta_B$のどちらを用いても解けるが，距離$x$が点Aを基準としていることから$\theta_A$を使おう。点Aの接線に対する点Xの変位量をXX"とすると，図fの通り，$y_x$は次式となる。

$$y_x=XX''-XX''=\theta_A\times x-\delta_{x|A}$$

この式の第二項目，$\delta_{x|A}$は，図心の基準点を点X，領域を点Xから点Aとする三角形を対象とする。

$$(\text{三角形の面積})=\frac{M_Bx^2}{2\ell}$$

$$(\text{点Xと図心の距離})=\frac{x}{3}$$

従って，

$$\delta_{x|A}=\frac{\frac{M_Bx^2}{2\ell}\times\frac{x}{3}}{EI}=\frac{M_Bx^3}{6\ell EI}$$

この結果と既に求めた$\theta_A$から，$y_x$は次のように求まる。

$$y_x=\theta_A\times x-\delta_{x|A}=\frac{M_B\ell}{6\ell EI}\times x-\frac{M_Bx^3}{6\ell EI}=\frac{M_B\ell x}{6EI}\times\left(1-\frac{x^2}{\ell^2}\right)$$

# 10月号演習問題解答

一方の支持点に曲げモーメントを受ける梁はこれからもよく登場する（今後何度も引用する）。その意味で，この結果，とりわけたわみ角$\theta_A$と$\theta_B$は非常に重要である。

【演習16-7】先端Aから距離$x$までの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考えるが，最初に点Aの反力$R_A$を点Bまわりのモーメントの釣り合いから求めておく。

$$R_A\times\ell=-2M-M$$
$$R_A=-\frac{3M}{\ell}$$

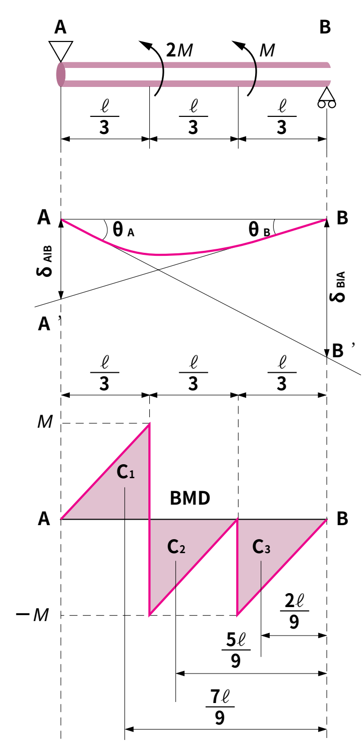
反力を出したら，$0\leqq x<\dfrac{\ell}{3}$の範囲の，左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考える。

$$M_x=-R_A\times x=\frac{3Mx}{\ell}$$
$$M_x=0 \qquad (x=0)$$
$$M_x=M \qquad \left(x=\frac{\ell}{3}\right)$$

次に，$\dfrac{\ell}{3}\leqq x<\dfrac{2\ell}{3}$。

$$M_x=-R_A\times x-2M$$
$$=\frac{3Mx}{\ell}-2M$$

g




$$M_x=-M \qquad \left(x=\frac{\ell}{3}\right)$$
$$M_x=0 \qquad \left(x=\frac{2\ell}{3}\right)$$

最後に，$\dfrac{2\ell}{3}\leqq x\leqq\ell$。

$$M_x=-R_A\times x-2M-M$$
$$=\frac{3Mx}{\ell}-3M$$
$$M_x=-M \qquad \left(x=\frac{2\ell}{3}\right)$$
$$M_x=0 \qquad (x=\ell)$$

以上の結果より，BMDは図gとなる。点Aのたわみ角を$\theta_A$，点Bのたわみ角を$\theta_B$とすれば，演習16-5と同様に求めることができる。まず$\theta_A$は，点Aの接線に対する点Bの変位量BB’（$=\delta_{B|A}$）を用いて，次のように表せる。

$$\theta_A=\frac{BB'}{\ell}=\frac{\delta_{B|A}}{\ell}$$

$\delta_{B|A}$は，図心の基準点を点B，領域を点Bから点AとするBMD，すなわちBMDの全領域を対象とするが，符号に注意して解こう。BMDの左の三角形の面積を$S_1$，図心を$C_1$（点Bと図心の距離を$\overline{C}_1$），中央の三角形の面積を$S_2$，図心を$C_2$（点Bと図心の距離を$\overline{C}_2$），右の三角形の面積を$S_3$，図心を$C_3$（点Bと図心の距離を$\overline{C}_3$）とおくと，対象とする全領域の（BMDの面積）と（点Bと図心の距離）は以下のようになる。

$$(\text{BMDの面積})=S_1+S_2+S_3$$
$$=\frac{1}{2}\times M\times\frac{\ell}{3}+\frac{1}{2}\times(-M)\times\frac{\ell}{3}+\frac{1}{2}\times(-M)\times\frac{\ell}{3}$$
$$=-\frac{M\ell}{6}$$

$$(\text{点Bと図心の距離})=\frac{S_1\times\overline{C}_1+S_2\times\overline{C}_2+S_3\times\overline{C}_3}{S_1+S_2+S_3}$$
$$=\frac{\dfrac{M\ell}{6}\times\dfrac{7\ell}{9}-\dfrac{M\ell}{6}\times\dfrac{5\ell}{9}-\dfrac{M\ell}{6}\times\dfrac{2\ell}{9}}{\dfrac{M\ell}{2}}$$
$$=0$$

従って，（BMDの面積）と（点Bと図心の距離）をかけて曲げ剛性$EI$で割った$\delta_{B|A}$はゼロ，さらには$\theta_A$もゼロとなる。

$$\delta_{B|A}=0$$
$$\theta_A=0$$

次に$\theta_B$は，点Bの接線に対する点Aの変位量AA’（＝

# 10月号演習問題解答

$\delta_{A|B}$）を用いる。

$$\theta_B = \frac{AA'}{\ell} = \frac{\delta_{A|B}}{\ell}$$

$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点Bとするの BMDを対象とする。従って，上述の$\theta_A$のときとは（BMDの面積）は等しいが，図心の基準点が異なる。点Aから測定するから，

（点Aと図心の距離）＝$\ell$－（点Bと図心の距離）

$$= \ell - 0$$

$$= \ell$$

従って$\delta_{A|B}$，さらに$\theta_B$は次のように求められる。

$$\delta_{A|B} = \frac{-\frac{M\ell}{6}\times\ell}{EI}$$

$$= -\frac{M\ell^2}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{-\frac{M\ell^2}{6EI}}{\ell}$$

$$= -\frac{M\ell}{6EI}$$

**【演習16-8】**先端Aから距離$x$までの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考えるが，最初に点Aの反力$R_A$を点Bまわりのモーメントの釣り合いから求めておく。

$$R_A \times \ell = P \times \frac{\ell}{3} + P \times \frac{2\ell}{3}$$

$$R_A = P$$

反力を出したら，$0 \leqq x < \frac{\ell}{3}$ の範囲の，左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いを考える。

$$M_x = R_A \times x = Px$$

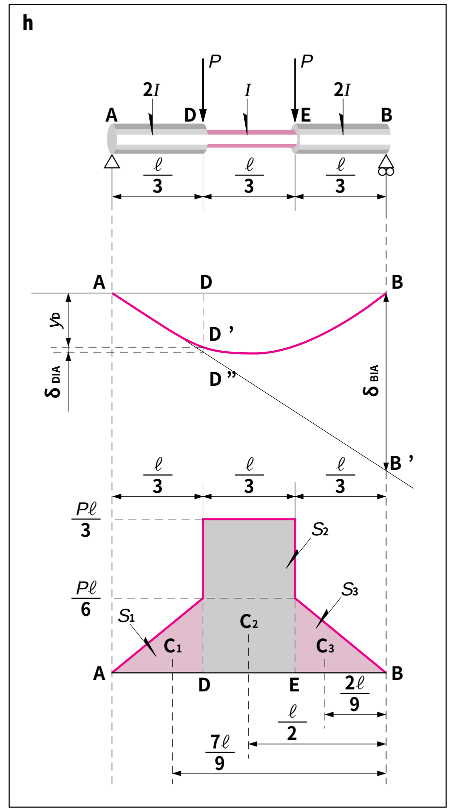
ただし，この左1/3の範囲は，曲げ剛性が2E$I$。従って曲げモーメントは1/2になるから，

$$M_x = R_A \times x = \frac{Px}{2}$$

次に，$\frac{\ell}{3} \leqq x < \frac{2\ell}{3}$を考えるが，ここは曲げ剛性がE$I$だから，素直に求めれば良い。

$$M_x = R_A \times x - P\left(x - \frac{\ell}{3}\right)$$

$$= \frac{P\ell}{3}$$




最後に，$\frac{2\ell}{3} \leqq x \leqq \ell$。

$$M_x = R_A \times x - P\left(x - \frac{\ell}{3}\right) - P\left(x - \frac{2\ell}{3}\right)$$

$$= -Px + P\ell$$

ただし，この右1/3の範囲は，曲げ剛性が2E$I$だから曲げモーメントは1/2になる。

$$M_x = \frac{-Px + P\ell}{2}$$

以上の結果より，BMDは**図h**の純曲げ状態となる。

点Aのたわみ角を$\theta_A$とすれば，演習16-5と同様に求めることができる。点Aの接線に対する点Bの変位量BB'（＝$\delta_{B|A}$）を用いて，

$$\theta_A = \frac{BB'}{\ell} = \frac{\delta_{B|A}}{\ell}$$

$\delta_{B|A}$は，図心の基準点を点B，領域を点Bから点Aとする BMD，すなわちBMDの全領域を対象とする。BMDの左1/3の面積を$S_1$，図心を$C_1$（点Bと図心の距離を$\overline{C}_1$），中央1/3の面積を$S_2$，図心を$C_2$（点Bと図心の距離を$\overline{C}$

$_2$)，右1/3の面積を$S_3$，図心を$C_3$（点Bと図心の距離を$\overline{C}_3$）とおくと，対象とする全領域の（BMDの面積）と（点Bと図心の距離）は以下のようになる（図心は，BMDの対称性から明らかだが…)。

$$(\text{BMDの面積}) = S_1 + S_2 + S_3$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{P\ell}{6}\times\frac{\ell}{3}+\frac{P\ell}{3}\times\frac{\ell}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{P\ell}{6}\times\frac{\ell}{3}$$
$$= \frac{P\ell^2}{6}$$

$$(\text{点Bと図心の距離}) = \frac{S_1\times\overline{C}_1+S_2\times\overline{C}_2+S_3\times\overline{C}_3}{S_1+S_2+S_3}$$
$$= \frac{\frac{P\ell^2}{36}\times\frac{7\ell}{9}+\frac{P\ell^2}{9}\times\frac{\ell}{2}+\frac{P\ell^2}{36}\times\frac{2\ell}{9}}{\frac{P\ell^2}{6}}$$
$$= \frac{\ell}{2}$$

従って，$\delta_{B|A}$，さらに$\theta_A$は次のように求められる。

$$\delta_{B|A} = \frac{\frac{P\ell^2}{6}\times\frac{\ell}{2}}{EI}$$
$$= \frac{P\ell^3}{12EI}$$
$$\theta_A = \frac{\frac{P\ell^3}{12EI}}{\ell}$$
$$= \frac{P\ell^2}{12EI}$$

続いて，点Dにおけるたわみを$y_D$とおく。点Aの接線に対する点Dの変位量をD′D″とすると，図hの通り，$y_D$は次式から求まる。

$$y_D = DD'' - D'D''$$
$$= \theta_A\times\frac{\ell}{3} - \delta_{D|A}$$

この式の第二項目，$\delta_{D|A}$は，図心の基準点を点D，領域を点Dから点AとするBMD，すなわち左側の三角形が対象だ。

$$(\text{左側の三角形の面積}) = S_1 = \frac{P\ell^2}{36}$$

$$(\text{点Dと図心の距離}) = \frac{\ell}{9}$$

従って，

$$\delta_{D|A} = \frac{\frac{P\ell^2}{36}\times\frac{\ell}{9}}{EI}$$
$$= \frac{P\ell^3}{324EI}$$

この結果と既に求めた$\theta_A$から，$y_D$は次のように求まる。

$$y_D = \theta_A\times\frac{\ell}{3} - \delta_{D|A}$$
$$= \frac{P\ell^2}{12EI}\times\frac{\ell}{3} - \frac{P\ell^3}{324EI}$$
$$= \frac{2P\ell^3}{81EI}$$

## ●第17章●

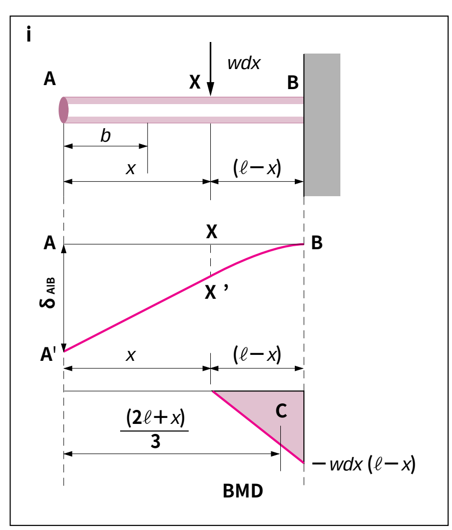
**【演習17-1】**この問題をたわみの重ね合わせ法で解く場合には，分布荷重を集中荷重の集合体，すなわち$b\leqq x\leqq\ell$の範囲に集中荷重$xdx$が分布して作用していると考える。まずは，このうちの一つの集中荷重に着目し，そのときの先端のたわみを求める。基本的に演習16-4と同じ問題だが，反復練習の意味で改めて解いていこう。

着目する集中荷重の作用点をX，先端からの距離を$x$とする。最初に，BMDを求めるが，先端Aから点Xの範囲は，

$$M_x = 0$$

続いて，点Xから点Bの範囲における任意の点を点T（先端からの距離を$t$）とすると，点Tにおける左要素の右断面のモーメントの釣り合いは，

$$M_x = -wdx\,(t-x)$$



# 10月号演習問題解答

従って，BMDは図iのようになる。

固定端である点Bの接線の傾きはゼロだから，先端Aのたわみは$\delta_{A|B}$（点Bの接線に対する点Aの変位量）と等価になる。さらに，$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点BとするBMD，すなわち全領域を対象とする。

$$(\text{BMDの面積}) = \frac{wdx(\ell - x)^2}{2}$$

$$(\text{点Aと図心の距離}) = x + \frac{2(\ell - x)}{3} = \frac{(2\ell + x)}{3}$$

従って，$\delta_{A|B}$は，

$$\delta_{A|B} = \frac{\dfrac{wdx(\ell - x)^2}{2} \times \dfrac{(2\ell + x)}{3}}{EI} = \frac{wdx(\ell - x)^2(2\ell + x)}{6EI} \quad ①$$

ちなみに，$\ell - x = a$，$x = \ell - a$，$wdx = P$として書き換えると，**演習16-4**の結果と同じになる。

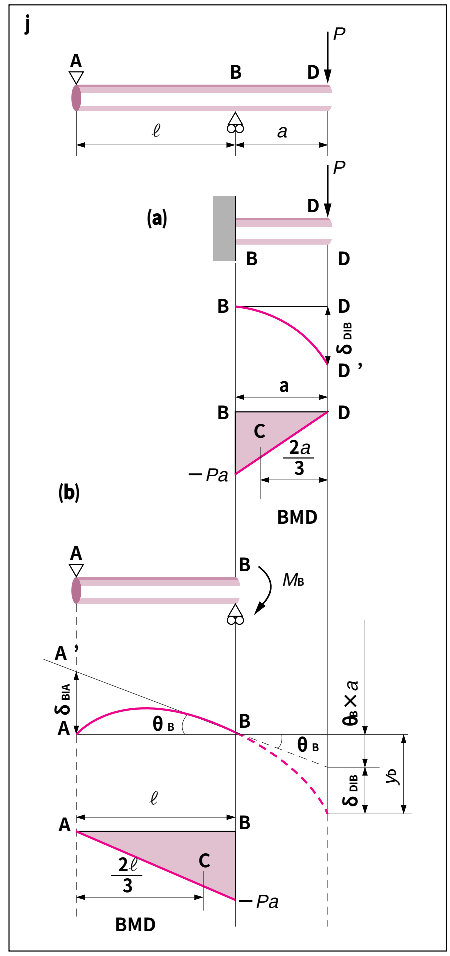
話が少し横にそれたが，式①が一つの集中荷重による先端のたわみ量だ。たわみの重ね合わせ法に基づき，すべての集中荷重のたわみ量を合計する（全たわみ量$y_A$を求める）には，式①を$b \leqq x \leqq \ell$の範囲にわたって積分すれば良い。

$$y_A = \int_b^\ell \frac{wdx(\ell - x)^2(2\ell + x)}{6EI}$$
$$= \frac{w}{6EI}\int_b^\ell (x^3 - 3\ell^2 x + 2\ell^3)dx$$
$$= \frac{w}{24EI}(3\ell^4 - 8\ell^3 b + 6\ell^2 b^2 - b^4)$$
$$= \frac{w(\ell - b)^2(3\ell + b)}{24EI}$$

当然，演習16-2の結果と同じになる。

**【演習17-2】**この問題はDB間とAB間に分けて考えていく。最初に，DB間の突き出し部〔**図j (a)**〕。これは，支持点Bを固定端とし，片持ち梁の先端Dに集中荷重$P$が作用するケースと見立てる。このケースは何度も解いてきたので計算過程は省略するが，BMDは**図j (a)**の三角形となる。

ここで先端Dのたわみを求める（このケースは基本中の基本なので，次に求める式①は記憶しておきたい）。片持ち梁（固定端の接線の傾きはゼロ）だから，$\delta_{D|B}$がそれと等価。$\delta_{D|B}$は，図心の基準点を点D，領域を点Dから点BとするBMD，すなわち三角形の全領域を対象とする。




$$(\text{三角形の面積}) = \frac{Pa^2}{2}$$

$$(\text{点Dと図心の距離}) = \frac{2a}{3}$$

従って，

$$\delta_{D|B} = \frac{\dfrac{Pa^2}{2} \times \dfrac{2a}{3}}{EI} = \frac{Pa^3}{3EI} \quad ①$$

次に，AB間の単純支持梁〔**図j (b)**〕。点Bには，集中荷重$P$によって曲げモーメント$M_B$が発生している。このときの，単純支持梁の曲げモーメント$M_x$は，左要素の右断面のモーメントの釣り合いから，

## 10月号演習問題解答

$$Mx=-\frac{M_Bx}{\ell}$$

ここで$M_B$の値は既に求めてある。上述の**図j (a)** のBMDで，点Bにおける値だ。

$$M_B=-Pa$$

従って，この単純支持梁のBMDは**図j (b)** となる（これは**演習16-6**と同じ問題。解き方に自信があれば**演習16-6**の答えを流用しよう。ここでは復習を兼ねて，再び解いてみる）。

以上，二つの梁に分解して解いてきたが，共通する点Bのたわみ角について検討してみると，固定端と考えたDB間の突き出し部の方はゼロ。これに対して単純支持梁と考えたAB間の方ではある値$\theta_B$を持つ。このことは，梁の連続性を考えれば矛盾している。

つまり実際には，点Bはあるたわみ角$\theta_B$を持ち，その分付き出し部は傾いた状態になっている。従って先端Dのたわみを求めるには，式①に，DB間が傾いている分，具体的には$\theta_B\times a$を足し合わせる必要がある〔**図j (b)**〕。ここで$\theta_B$は，

$$\theta_B=\frac{\mathrm{AA'}}{\ell}=\frac{\delta_{A|B}}{\ell}$$

$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点Bとする BMD，すなわち**図j (b)** の三角形の全領域を対象とする。

$$（三角形の面積）=\frac{Pa\ell}{2}$$

$$（点Aと図心の距離）=\frac{2\ell}{3}$$

従って$\delta_{A|B}$，さらに$\theta_B$は以下のようになる（曲げモーメント$P_a$を$M_B$とおけば，$\theta_B$の導出過程は**演習16-6**と全く同じ。できれば，たわみ角$\theta_B$の値を記憶しておきたい）。

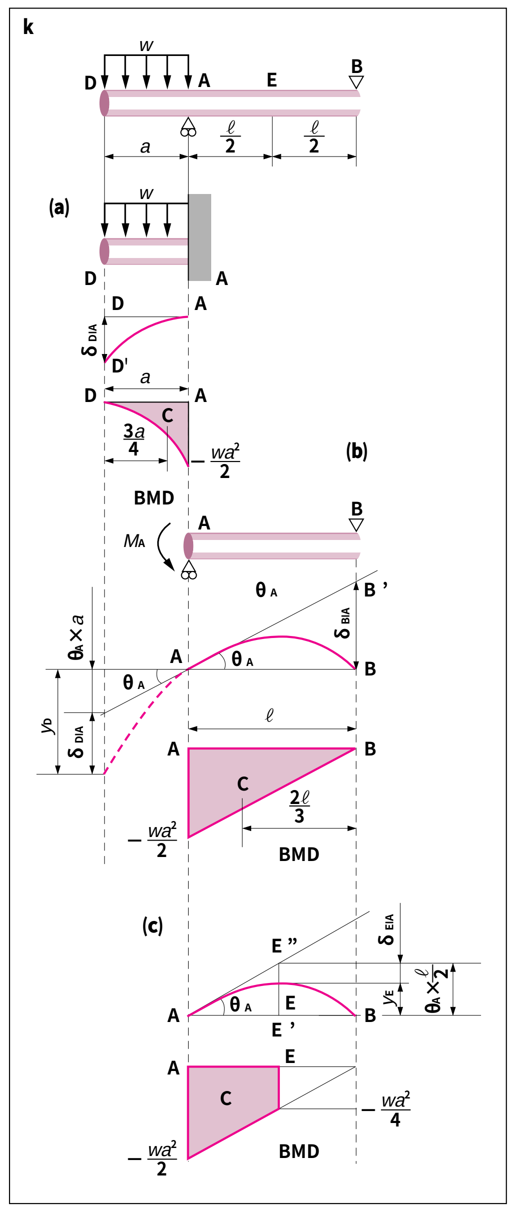
$$\delta_{A|B}=\frac{\frac{Pa\ell}{2}\times\frac{2\ell}{3}}{EI}=\frac{Pa\ell^2}{3EI}$$

$$\theta_B=\frac{Pa\ell}{3EI}$$

上述の通り，先端Dにおけるたわみ$y_D$は以下のように計算できる。

$$y_D=式①+\theta_B\times a=\frac{Pa^3}{3EI}+\frac{Pa\ell}{3EI}\times a=\frac{Pa^3}{3EI}+\frac{Pa^2\ell}{3EI}$$

**【演習17-3】** 演習17-2と同様，DA間とAB間に分けて考えていく。最初に，AD間の突き出し部〔**図k (a)**〕。支持点Aを固定端とし，全体に分布荷重$w$が作用するケースと見立



てる。左要素の右断面のモーメントの釣り合いから,

$$M_x = -\frac{wx^2}{2}$$

BMDは**図k (a)** の放物線となる。

ここで先端Dのたわみと等価な$\delta_{D|A}$を求める。$\delta_{D|A}$は,図心の基準点を点D,領域を点Dから点AとするBMD,すなわち放物線の全領域を対象とする。(放物線の面積)と(図心までの距離)は本誌10月号p.105の表の値を参考に,

$$(\text{放物線の面積}) = \frac{wa^3}{6}$$

$$(\text{点Dと図心の距離}) = \frac{3a}{4}$$

従って,次の結果を得る(次の結果も,覚えておきたいものの一つだ)。

$$\delta_{D|A} = \frac{\dfrac{wa^3}{6} \times \dfrac{3a}{4}}{EI} = \frac{wa^4}{8EI} \quad ①$$

次に,AB間の単純支持梁〔**図k (b)**〕。点Aには,分布荷重$w$によって曲げモーメント$M_A$が発生している。このときの,単純支持梁の曲げモーメント$M_x$は,左要素の右断面のモーメントの釣り合いから,

$$M_x = -M_A + \frac{M_A x}{\ell}$$

ここで$M_A$の値は既に求めてある。上述の**図k (a)** のBMDで,点Bにおける値だ。

$$M_A = -\frac{wa^2}{2}$$

従って,この単純支持梁のBMDは**図k (b)** となり,**演習16-6**と同じ。しかしあえて解くと,先端Dのたわみを求めるには,式①に,AD間が傾いている分,具体的には$\theta_A \times a$を足し合わせる必要がある〔**図k (b)**〕。ここで$\theta_A$は,

$$\theta_A = \frac{BB'}{\ell} = \frac{\delta_{B|A}}{\ell}$$

$\delta_{B|A}$は,図心の基準点を点B,領域を点Bから点AとするBMD,すなわち**図k (b)** の三角形の全領域を対象とする。

$$(\text{三角形の面積}) = \frac{wa^2\ell}{4}$$

$$(\text{点Bと図心の距離}) = \frac{2\ell}{3}$$

従って$\delta_{B|A}$,さらに$\theta_A$は以下のようになる。

$$\delta_{B|A} = \frac{\dfrac{wa^2\ell}{4} \times \dfrac{2\ell}{3}}{EI} = \frac{wa^2\ell^2}{6EI}$$

$$\theta_A = \frac{wa^2\ell}{6EI}$$

上述の通り,先端Dにおけるたわみ$y_D$は以下のように計算できる。

$$y_D = \text{式①} + \theta_A \times a = \frac{wa^4}{8EI} + \frac{wa^2\ell}{6EI} \times a = \frac{wa^4}{8EI} + \frac{wa^3\ell}{6EI}$$

次に,点Eにおけるたわみ$y_E$を求める〔**図k (c)**〕。点Eの変位前の位置を点E',点Aの接線に対する点Eの変位量をEE"($=\delta_{E|A}$)とすると,

$$y_E = E'E'' - EE'' = \theta_A \times \frac{\ell}{2} - \delta_{E|A} = \frac{wa^2\ell^2}{12EI} - \delta_{E|A} \quad ②$$

2番目の式から3番目の式への書き換えは,先に求めた$\theta_A$を代入した。あとは,$\delta_{E|A}$を求めれば良い。は,図心の基準点を点E,領域を点Eから点AとするBMD,すなわち**図k (c)** の台形を対象とする。

$$(\text{台形の面積}) = \frac{\left(\dfrac{wa^2}{4} + \dfrac{wa^2}{2}\right) \times \dfrac{\ell}{2}}{2} = \frac{3wa^2\ell}{16}$$

$$(\text{点Eと図心の距離}) = \frac{\ell}{2} - \frac{\dfrac{\ell}{2}\left(2 \times \dfrac{wa^2}{4} + \dfrac{wa^2}{2}\right)}{3 \times \left(\dfrac{wa^2}{4} + \dfrac{wa^2}{2}\right)} = \frac{5\ell}{18}$$

# 10月号演習問題解答

従って，

$$\delta_{E|A} = \frac{\dfrac{3wa^2\ell}{16} \times \dfrac{5\ell}{18}}{EI}$$
$$= \frac{5wa^2\ell^2}{96EI}$$

この値を式②に代入すると，目的である点Eのたわみ$y_E$が次のように求まる。

$$y_E = \frac{wa^2\ell^2}{12EI} - \delta_{E|A}$$
$$= \frac{wa^2\ell^2}{12EI} - \frac{5wa^2\ell^2}{96EI}$$
$$= \frac{3wa^2\ell^2}{96EI} = \frac{wa^2\ell^2}{32EI}$$

なお，**演習16-6**の結果である$y_x$の式に，$M_B = \dfrac{wa^2}{2}$，$x = \dfrac{\ell}{2}$を代入すれば同じ答えになる。確認しておこう。

**【演習17-4】**この問題は，集中荷重$P_1$だけが作用するケースと同$P_2$だけが作用するケースに分けて考えよう。

まず，集中荷重$P_1$だけが作用するケース。これは，演習17-2と全く同じ問題である。従って，先端Dのたわみを$y_{D1}$とし，演習17-2の結果を使う〔**図l (a)**〕。

$$y_{D1} = \frac{P_1a^3}{3EI} + \frac{P_1a^2\ell}{3EI} \quad ①$$

次に，集中荷重$P_2$だけが作用するケース。左要素の右断面のモーメントの釣り合いから，$0 \leqq x < a$の場合，

$$M_x = 0$$

$a \leqq x < \left(a + \dfrac{\ell}{2}\right)$ の場合，

$$M_x = \frac{P_2(x-a)}{2}$$

$\left(a + \dfrac{\ell}{2}\right) \leqq x < (a+\ell)$ の場合，

$$M_x = \frac{P_2(-x+a+\ell)}{2}$$

以上，BMDは**図l (b)**となる。

ここで，先端Dのたわみ$y_{D2}$とすると，AD間は変形を受けていないから点Aの接線の傾き$\theta_A$を用いて，

$$y_{D2} = \theta_A \times a \quad ②$$

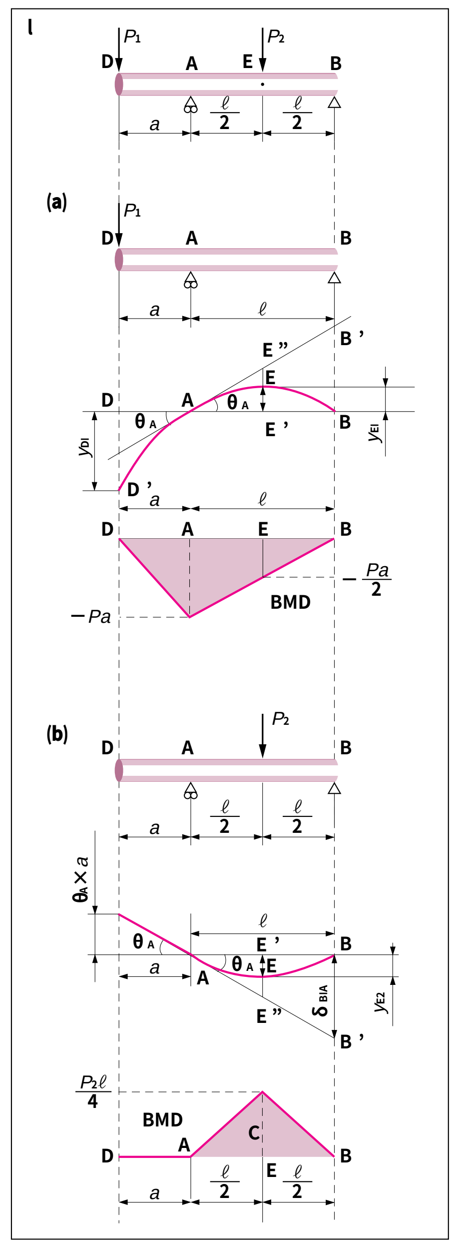
と表せる。さらに$\theta_A$は，もう何度も解いてきたように，

$$\theta_A = \frac{BB'}{\ell}$$
$$= \frac{\delta_{B|A}}{\ell}$$

だから，式②は次のようになる。

$$y_{D2} = \frac{\delta_{B|A}}{\ell} \times a \quad ②'$$

要は，$\delta_{B|A}$を求めれば良い。$\delta_{B|A}$は，図心の基準点を点B，領域を点Bから点Aとする BMD，すなわち三角形を対



# 10月号演習問題解答

象とする。

$$(\text{三角形の面積})=\frac{P_2\ell^2}{8}$$

$$(\text{点Bと図心の距離})=\frac{\ell}{2}$$

従って,

$$\delta_{B|A}=\frac{\frac{P_2\ell^2}{8}\times\frac{\ell}{2}}{EI}=\frac{P_2\ell^3}{16EI}$$

これを式②'に代入すれば，$y_{D2}$が求まる。

$$y_{D2}=\frac{\frac{P_2\ell^3}{16EI}}{\ell}\times a=\frac{P_2a\ell^2}{16EI} \quad ②''$$

結局，先端Dのたわみ$y_D$を求めるには，式①と式②"の結果を足し合わせれば良いが，符号に注意する。下向きを正とすれば，式②"の方にマイナスを付ける必要がある。

$$y_D=y_{D1}-y_{D2}=\frac{P_1a^3}{3EI}+\frac{P_1a^2\ell}{3EI}-\frac{P_2a\ell^2}{16EI}$$

次に，点Eにおけるたわみ$y_E$を求めるが，ここでも重ね合わせ法を利用する。つまり，集中荷重$P_1$だけが作用するケースの点Eのたわみ$y_{E1}$と，同$P_2$だけが作用するケースの点Eのたわみ$y_{E2}$を符号を考慮しながら足し合わせるのである。ただし，どちらのケースも，点Eの変位する前の位置を点E'，点Aの接線に対する点Eの変位量をEE"（$=\delta_{E|A}$）とおく。すると$y_{E1}$も$y_{E2}$も，

$$E'E''-EE''=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{E|A}$$

で表せる。では，$y_{E1}$から求めていこう。

$$y_{E1}=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{E|A} \quad ③$$

ここで，式③の第一項目の$\theta_A$は演習17-2の$\theta_B$に等しい。

$$\theta_A=\frac{P_1a\ell}{3EI} \quad ④$$

第二項目，$\delta_{E|A}$は，図心の基準点を点E，領域を点Eから点AとするBMD，すなわち台形を対象とする〔**図l(a)**〕。

$$(\text{台形の面積})=\frac{\left(\frac{P_1a}{2}+P_1a\right)\times\frac{\ell}{2}}{2}=\frac{3P_1a\ell}{8}$$

$$(\text{点Eと図心の距離})=\frac{\ell}{2}-\frac{\frac{\ell}{2}\left(2\times\frac{P_1a}{2}+P_1a\right)}{3\times\left(\frac{P_1a}{2}+P_1a\right)}=\frac{5\ell}{18}$$

従って,

$$\delta_{E|A}=\frac{\frac{3P_1a\ell}{8}\times\frac{5\ell}{18}}{EI}=\frac{15P_1a\ell^2}{144EI} \quad ⑤$$

以上，点Eのたわみ$y_{E1}$は式③④⑤より，以下になる。

$$y_{E1}=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{E|A}=\frac{P_1a\ell}{3EI}\times\frac{\ell}{2}-\frac{15P_1a\ell^2}{144EI}=\frac{P_1a\ell^2}{16EI} \quad ⑥$$

で表せる。

続いて，$y_{E2}$。上述の通り，式⑦から求める。

$$y_{E2}=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{E|A} \quad ⑦$$

ここで，式⑦の第一項目の$\theta_A$は，直前の$y_{D2}$を求める過程で次のように計算した。

$$\theta_A=\frac{P_2\ell^2}{16EI} \quad ⑧$$

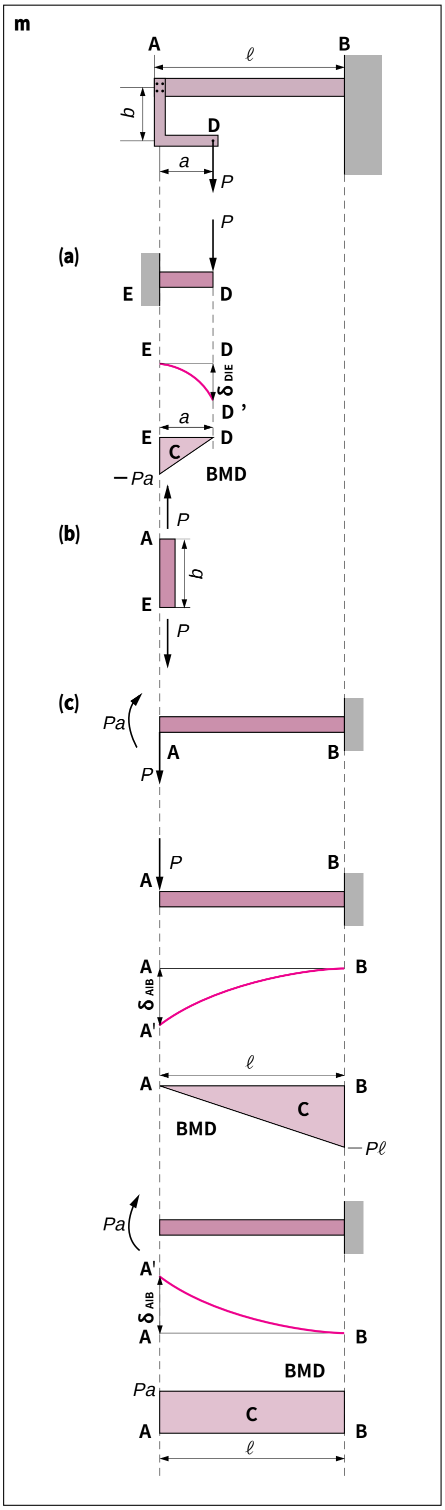
第二項目，$\delta_{E|A}$は，図心の基準点を点E，領域を点Eから点AとするBMD，すなわち左半分の三角形を対象とする〔**図l(b)**〕。

$$(\text{三角形の面積})=\frac{\frac{P_2\ell}{4}\times\frac{\ell}{2}}{2}=\frac{P_2\ell^2}{16}$$

$$(\text{点Eと図心の距離})=\frac{\ell}{6}$$

従って,

# 10月号演習問題解答




$$\delta_{E|A}=\frac{\dfrac{P_2\ell^2}{16}\times\dfrac{\ell}{6}}{EI}=\frac{P_2\ell^3}{96EI} \qquad ⑨$$

以上，点Eのたわみ$y_{E2}$は式⑦⑧⑨より，以下になる。

$$y_{E2}=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{E|A}=\frac{P_2\ell^2}{16EI}\times\frac{\ell}{2}-\frac{P_2\ell^3}{96EI}=\frac{P_2\ell^3}{48EI} \qquad ⑩$$

結局，点Eのたわみ$y_E$は式⑥と式⑩の合計。ただし，下向きを正として符号を考慮すると，式⑥の方にマイナスを付ける必要がある。従って，以下のように求まる。

$$y_E=y_{E2}-y_{E1}=\frac{P_2\ell^3}{48EI}-\frac{P_1a\ell^2}{16EI}=\frac{\ell^2\,(P_2\ell-3P_1a)}{48EI}$$

実は，この問題は，単純支持梁の中央に集中荷重$P_2$，左端に曲げモーメント$P_1a$が個々に作用しているケースの重ね合わせと理解できる。つまり，集中荷重だけが作用しているときの結果である式⑩から，曲げモーメントだけが作用するときの結果を引けば同じ答えになる。ちなみに，曲げモーメントだけが作用するときのひずみは，もう何度も引用してきた**演習16-6**の答えである$y_x$の式の$M_B$に$P_1a$を，$x$に$\dfrac{\ell}{2}$を代入して得られる値である。

**【演習17-5】**添え木の90 °に折れているところを点Eとしよう。この問題は，点D～点E，点E～点A，点A～点Bの三つに分解して解くと良い。

まず，点D～点E〔**図m (a)**〕。この部分は，点Eを固定端とし先端Dに集中荷重$P$が作用する片持ち梁と見立てることができる。曲げモーメントの釣り合いの式の導入は省略するが，BMDは**図m (a)**に示す三角形となる。このときの先端Dのたわみは$\delta_{D|E}$と等価になる。$\delta_{D|E}$は，図心の基準点を点E，領域を点Dから点EとするBMD，すなわち三角形の全領域を対象とする。

# 10月号演習問題解答

$$（三角形の面積）=\frac{Pa^2}{2}$$

$$（点Dと図心の距離）=\frac{2a}{3}$$

従って，

$$\delta_{D|E}=\frac{\frac{Pa^2}{2}\times\frac{2a}{3}}{EI}$$

$$=\frac{Pa^3}{3EI}（下向き） \quad ①$$

繰り返すが，この結果は是非覚えておきたい。なお，このBMDからも明らかなように，点E，点Aには曲げモーメント$Pa$が作用する。

次に，点E～点A〔**図m(b)**〕。ここは集中荷重$P$による引っ張りを受けており，次の式が成り立っている（この部分は鉛直方向の荷重だけを考慮するため，曲げモーメントは無関係）。

$\sigma=E\varepsilon$

$\sigma$は応力，$\varepsilon$はひずみだった。$\sigma$は，与えられている$P$と$A$から，ひずみは，与えられている$b$とここで求めたい伸び$\lambda$から，次のように書き換えられる。

$$\frac{P}{A}=E\frac{\lambda}{b}$$

$$\lambda=\frac{Pb}{AE}（下向き） \quad ②$$

最後に，点A～点B〔**図m(c)**〕。この部分は，先端Aに集中荷重$P$と曲げモーメント$Pa$を受ける片持ち梁。そこで集中荷重$P$だけを受けるケースと曲げモーメント$Pa$だけを受けるケースに分けて考えていこう。

集中荷重$P$だけを受けるケース。BMDは**図m(c)**に示した三角形。点Aのたわみは$\delta_{A|B}$と等価。$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点BとするBMD，すなわち三角形の全領域を対象とする。

$$（三角形の面積）=\frac{P\ell^2}{2}$$

$$（点Aと図心の距離）=\frac{2\ell}{3}$$

従って，

$$\delta_{A|B}=\frac{\frac{P\ell^2}{2}\times\frac{2\ell}{3}}{EI}$$

$$=\frac{P\ell^3}{3EI}（下向き） \quad ③$$

続いて，曲げモーメント$Pa$だけを受けるケース。左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いは，

$M_x=Pa$

従って，BMDは**図m(c)**に示した四角形となる。点Aのたわみは$\delta_{A|B}$と等価。$\delta_{A|B}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点BとするBMD，すなわち三角形の全領域を対象とする。

$$（四角形の面積）=Pa\ell$$

$$（点Aと図心の距離）=\frac{\ell}{2}$$

従って，

$$\delta_{A|B}=\frac{Pa\ell\times\frac{\ell}{2}}{EI}$$

$$=\frac{Pa\ell^2}{2EI}（上向き） \quad ④$$

結局，点Aの変位$y_A$は，式③と式④を足し合わせたもの。下向きを正とすれば，次になる。

$y_A$＝式③－式④

$$=\frac{P\ell^3}{3EI}-\frac{Pa\ell^2}{2EI}（下向き） \quad ⑤$$

点Dのたわみ$y_D$については，点Aの変位量$y_A$，AE間の伸び$\lambda$，集中荷重$P$による点Dの変位量$\delta_{D|E}$の合計，具体的には式①，式②，式⑤の和となる。

$y_D$＝式①＋式②＋式⑤

$$=\frac{Pa^3}{3EI}+\frac{Pb}{AE}+\frac{P\ell^3}{3EI}-\frac{Pa\ell^2}{2EI}$$

$$=\frac{P(2\ell^3-3a\ell^2+2a^3)}{6EI}+\frac{Pb}{AE}（下向き）$$

**【演習17-6】**添え木の90°に折れているところを点E，単純支持梁の中央を点Fとしよう。演習17-5と同様，基本的には点D～点E，点E～点F，点A～点Bの三つに分解して解いていくが，ここではEF間の長さと断面積が与えられていない。従って，このEF間の伸びは無視できるものと考え，

DE間とAB間を検討する。

まず，点D～点E〔**図n (a)**〕。この部分は，点Eを固定端とし先端Dに集中荷重$P$が作用する片持ち梁と見立てることができ，演習17-5と全く同じである。従って，点Dのたわみ$\delta_{D|E}$は先の結果をそのまま流用する。ただし，添え木の曲げ剛性を$E_1I_1$とおく。

$$\delta_{D|E}=\frac{Pa^3}{3E_1I_1}\quad\text{（下向き）} \tag{①}$$

次に，点A～点B〔**図n (b)**〕。この部分は，中央の点Fに集中荷重$P$と曲げモーメント$Pa$を受ける単純支持梁である。そこで集中荷重$P$だけを受けるケースと曲げモーメント$Pa$だけを受けるケースに分けて考えていく。

集中荷重$P$だけを受けるケース。BMDの求め方は省略するが，**図n (b)** に示した三角形になる。点Fの変位する前の位置を点F'，点Aの接線に対する点Fの変位量をFF''（$=\delta_{F|A}$）とすると，点Fのたわみ$y_{F1}$は点Aのたわみ角$\theta_A$を用いて次式から求めることができる。

$$\begin{aligned}y_{F1}&=\mathrm{F'F''}-\mathrm{FF''}\\&=\theta_A\times\frac{\ell}{2}-\delta_{F|A}\\&=\frac{\mathrm{BB'}}{\ell}\times\frac{\ell}{2}-\delta_{F|A}\\&=\frac{\delta_{B|A}}{\ell}\times\frac{\ell}{2}-\delta_{F|A}\end{aligned} \tag{②}$$

まず，$\delta_{B|A}$を求める。これは，図心の基準点を点B，領域を点Bから点AとするBMD，すなわち三角形の全領域を対象とする。

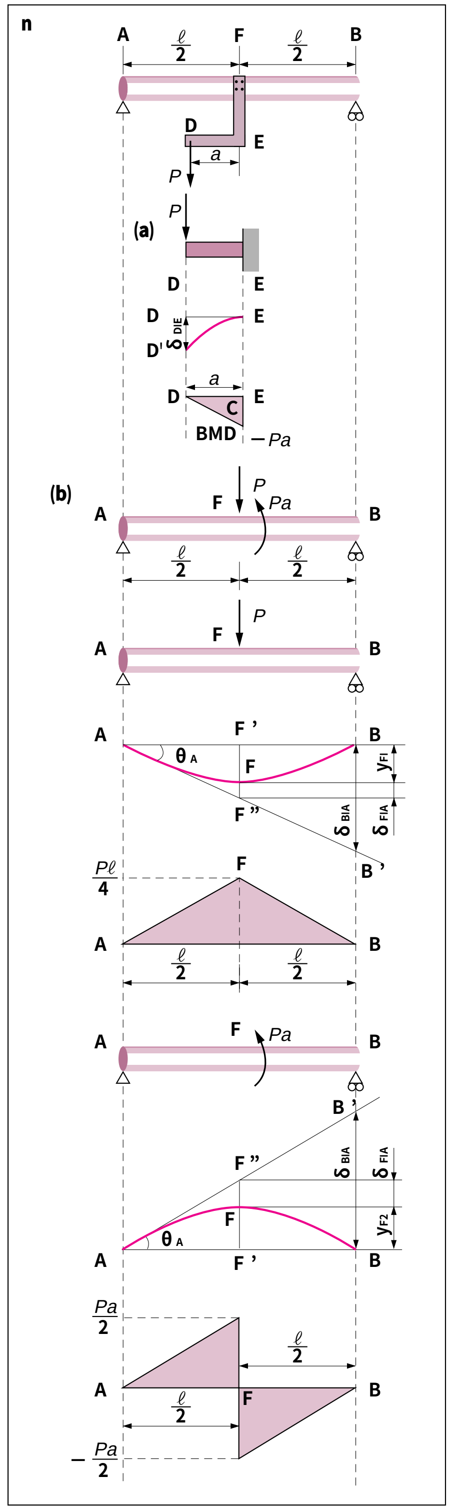
$$\text{（三角形の面積）}=\frac{P\ell^2}{8}$$

$$\text{（点Bと図心の距離）}=\frac{\ell}{2}$$

従って，

$$\delta_{B|A}=\frac{\dfrac{P\ell^2}{8}\times\dfrac{\ell}{2}}{EI}=\frac{P\ell^3}{16EI} \tag{③}$$

次に，$\delta_{F|A}$は，図心の基準点を点F，領域を点Fから点AとするBMD，すなわち左半分の三角形を対象とする。



$$(\text{左半分の三角形の面積}) = \frac{P\ell^2}{16}$$

$$(\text{点Fと図心の距離}) = \frac{\ell}{6}$$

従って,

$$\delta_{F|A} = \frac{\dfrac{P\ell^2}{16} \times \dfrac{\ell}{6}}{EI} = \frac{P\ell^3}{96EI} \quad ④$$

以上，式②は式③と式④から以下の通り求まる。

$$y_{F1} = \frac{\delta_{B|A}}{\ell} \times \frac{\ell}{2} - \delta_{F|A} = \frac{P\ell^2}{16EI} \times \frac{\ell}{2} - \frac{P\ell^3}{96EI} = \frac{P\ell^3}{32EI} - \frac{P\ell^3}{96EI} = \frac{P\ell^3}{48EI}\ (\text{下向き}) \quad ②'$$

続いて，曲げモーメント$Pa$だけを受けるケース。左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いは，点Aの反力$R_A$を用いて,

$$M_x = R_A x = \frac{Pax}{\ell} \quad \left(0 \leqq x < \frac{\ell}{2}\right)$$

$$M_x = R_A x + Pa = \frac{Pax}{\ell} - Pa \quad \left(\frac{\ell}{2} \leqq x < \ell\right)$$

ここで，点Aの反力は点Bまわりのモーメントの釣り合いから解いた。これより，BMDは図n (b) に示した二つの三角形となる。

ここでも，点Fのたわみ$y_{F2}$は式②を利用して計算する。もう何度も練習してきたので，ここでは一挙に行こう。

$$y_{F2} = \frac{\delta_{B|A}}{\ell} \times \frac{\ell}{2} - \delta_{F|A} \quad ②$$

$$= \frac{\dfrac{-\dfrac{Pa\ell}{8} \times \dfrac{\ell}{3} + \dfrac{Pa\ell}{8} \times \left(\dfrac{\ell}{2} + \dfrac{\ell}{6}\right)}{EI}}{\ell} \times \frac{\ell}{2} - \frac{\dfrac{Pa\ell}{8} \times \dfrac{\ell}{6}}{EI}$$

$$= \frac{Pa\ell^2}{48EI} - \frac{Pa\ell^2}{48EI} = 0 \quad ②''$$

結局，点Fの変位量$y_F$は二つのケースの結果の重ね合わせ，すなわち式②’と式②”の合計になる。

$$y_F = y_{F1} - y_{F2} = \frac{P\ell^3}{48EI}\ (\text{下向き}) \quad ⑤$$

ここまでDE間，AB間を検討してきたが，これで終わったと思ってはいけない。点Fのたわみ角だ。もし点Fがたわみ角を持っていれば，その傾いた分だけ点Dは変位することになる。実際，曲げモーメントを受けて，点Fはたわみ角を持つ。そのたわみ角を$\theta_F$とおけば,

$$\theta_F = \frac{\delta_{A|F}}{\dfrac{\ell}{2}} = \frac{\dfrac{\dfrac{Pa\ell}{8} \times \dfrac{\ell}{3}}{EI}}{\dfrac{\ell}{2}} = \frac{Pa\ell}{12EI}$$

従って点Dは，点Fのたわみ角$\theta_F$の影響で$\theta_F \times a$だけ下向きに変位していることになる。具体的には,

$$\theta_F \times a = \frac{Pa^2\ell}{12EI}\ (\text{下向き}) \quad ⑥$$

以上，問題の点Dのたわみ$y_D$については，集中荷重$P$による点Dの変位量$\delta_{D|E}$，点Fの変位量$y_F$，点Fのたわみ角による変位分の合計，具体的には式①，式⑤，式⑥の和となる。

$$y_D = \text{式①} + \text{式⑤} + \text{式⑥} = \frac{Pa^3}{3E_1I_1} + \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{Pa^2\ell}{12EI}\ (\text{下向き})$$

**【演習17-7】**演習17-1と全く同様だが，この問題では，$0 \leqq x \leqq \frac{\ell}{2}$の範囲に集中荷重$xdx$が分布して作用していると考える。とはいえ，BMDを求めるまでは演習17-1と全く同じ。BMDは図iを参照し，先端Aのたわみ$\delta_{A|B}$は既に求めた値をそのまま流用する。

$$\delta_{A|B} = \frac{wdx(\ell - x)^2(2\ell + x)}{6EI}$$

# 10月号演習問題解答

これが，一つの集中荷重による先端のたわみ量。すべての集中荷重のたわみ量を合計する（全たわみ量$y_A$を求める）には，$0 \leqq x \leqq \frac{\ell}{2}$の範囲にわたって積分すれば良い。

$$
\begin{aligned}
y_A &= \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{wdx(\ell - x)^2(2\ell + x)}{6EI} \\
&= \frac{w}{6EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} (x^3 - 3\ell^2 x + 2\ell^3)\,dx \\
&= \frac{w}{6EI}\left(\frac{\ell^4}{64} - \frac{3\ell^4}{8} + \ell^4\right) \\
&= \frac{41w\ell^4}{384EI}
\end{aligned}
$$

**【演習17-8】**演習17-2と同様，DB間とAB間に分けて考えていく。最初に，DB間の突き出し部〔**図o (a)**〕。支持点Bを固定端とし，片持ち梁全体に分布荷重$w$が作用するケースと見立てる。点Dのたわみは上述の演習17-7を応用しよう（梁の長さが$\ell$から$a$に変わるから要注意）。具体的には，積分範囲を0～$a$に変更すれば良い。

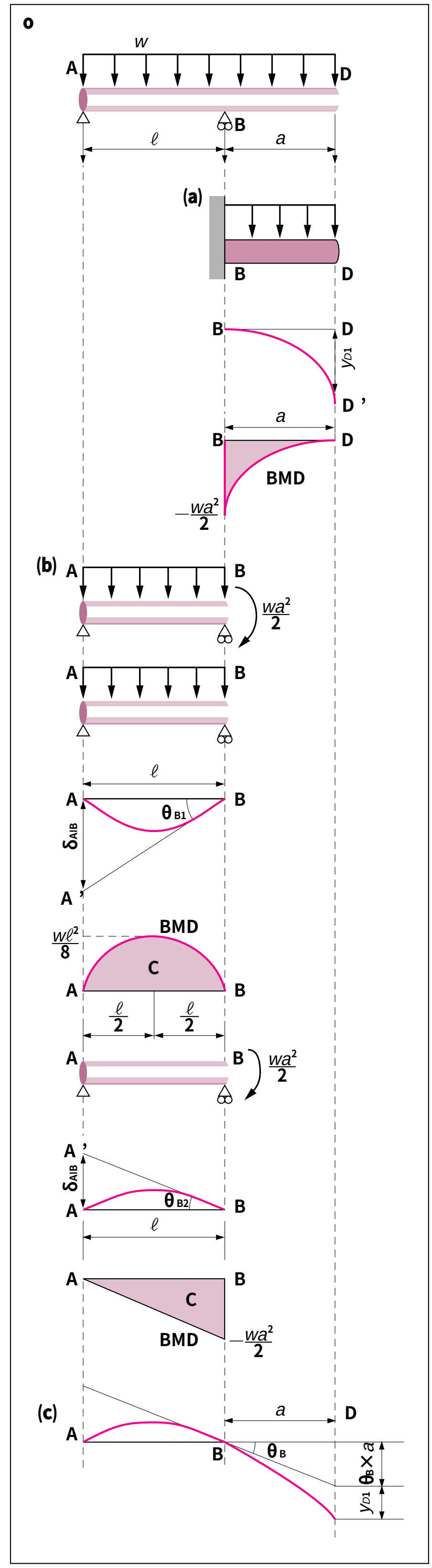
$$
\begin{aligned}
y_{D1} &= \int_0^{a} \frac{wdx(a - x)^2(2a + x)}{6EI} \\
&= \frac{w}{6EI}\int_0^{a} (x^3 - 3a^2 x + 2a^3)\,dx \\
&= \frac{w}{6EI}\left(\frac{a^4}{4} - \frac{3a^4}{2} + 2a^4\right) \\
&= \frac{wa^4}{8EI}
\end{aligned}
\qquad ①
$$

念のため，BMDを**図o (a)**に示しておく。

次に，AB間の単純支持梁〔**図o (b)**〕。点Bには，分布荷重$w$によって曲げモーメント$\frac{wa^2}{2}$が発生しているから〔**図o (b)**〕，分布荷重と曲げモーメントの複合荷重になっている。そこで分布荷重だけが作用するケースと曲げモーメントだけが作用するケースにわけて考えていく。まず分布荷重だけが作用するケース。単純支持梁の曲げモーメント$M_x$は，左要素の右断面のモーメントの釣り合いから，

$$
\begin{aligned}
M_x &= -\frac{wx^2}{2} + R_A x \\
&= -\frac{wx^2}{2} + \frac{w\ell x}{2}
\end{aligned}
$$

ここで，点Aの反力$R_A$は点Bまわりのモーメントの釣り合いから求めた。これより，BMDは**図o (b)**の放物線となる。



# 10月号演習問題解答

この問題でも演習17-2と同じように，点Bのたわみ角$\theta_B$を求める。先ほど，片持ち梁（点Bのたわみ角はゼロ）と仮定した付き出し部は，実際には傾いている。従って，先端Dのたわみを求めるには，式①に，DB間が傾いている分，具体的には$\theta_B \times a$を足し合わせれば良いことになる〔**図o (c)**〕。

そこで，分布荷重による点Bのたわみ角$\theta_{B1}$を求めよう。もう何度も解いてきているように，以下の関係式を使う。

$$\theta_{B1} = \frac{\mathrm{AA'}}{\ell} = \frac{\delta_{\mathrm{A|B}}}{\ell}$$

$\delta_{\mathrm{A|B}}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点BとするBMD，すなわち**図o (b)**の放物線の全領域を対象とする。放物線の面積は本誌10月号p.105の表を参考に求めよう。

$$(\text{放物線の面積}) = \frac{2}{3} \times \ell \times \frac{w\ell^2}{8} = \frac{w\ell^3}{12}$$

$$(\text{点Aと図心の距離}) = \frac{\ell}{2}$$

従って$\delta_{\mathrm{A|B}}$，さらに$\theta_{B1}$は以下のように求まる。

$$\delta_{\mathrm{A|B}} = \frac{\frac{w\ell^3}{12} \times \frac{\ell}{2}}{\mathrm{E}I} = \frac{w\ell^4}{24\mathrm{E}I}$$

$$\theta_{B1} = \frac{w\ell^3}{24\mathrm{E}I} \quad ②$$

続いて，曲げモーメントだけが作用するケース。単純支持梁の曲げモーメント$M_x$は，左要素の右断面のモーメントの釣り合いから，

$$M_x = R_A x = -\frac{wa^2x}{2\ell}$$

ここで，点Aの反力$R_A$は点Bまわりのモーメントの釣り合いから求めた。これより，BMDは**図o (b)**の三角形となる。

分布荷重のときと同じ手順で，点Bのたわみ角$\theta_{B2}$を求める。

$$\theta_{B2} = \frac{\mathrm{AA'}}{\ell} = \frac{\delta_{\mathrm{A|B}}}{\ell}$$

$\delta_{\mathrm{A|B}}$は，図心の基準点を点A，領域を点Aから点BとするBMD，すなわち**図o (b)**の三角形の全領域を対象とする。

$$(\text{三角形の面積}) = \frac{wa^2\ell}{4}$$

$$(\text{点Aと図心の距離}) = \frac{2\ell}{3}$$

従って$\delta_{\mathrm{A|B}}$，さらに$\theta_{B2}$は以下のように計算できる。

$$\delta_{\mathrm{A|B}} = \frac{\frac{wa^2\ell}{4} \times \frac{2\ell}{3}}{\mathrm{E}I} = \frac{wa^2\ell^2}{6\mathrm{E}I}$$

$$\theta_{B2} = \frac{wa^2\ell}{6\mathrm{E}I} \quad ③$$

結局，分布荷重と曲げモーメントの両方を考慮した複合荷重による点Bのたわみ角$\theta_B$は，式②と式③の重ね合わせになる。ここで符号を考え，下向きを正とする。すると，

$$\theta_B = \text{式③} - \text{式②} = \theta_{B2} - \theta_{B1} = \frac{wa^2\ell}{6\mathrm{E}I} - \frac{w\ell^3}{24\mathrm{E}I}$$

上述の通り，先端Dにおけるたわみ$y_D$は，点Bのたわみ角$\theta_B$によるBD間の傾きを考慮すると，以下のように求めることができる〔**図o (c)**〕。

$$y_D = \text{式①} + \theta_B \times a = \frac{wa^4}{8\mathrm{E}I} + \left(\frac{wa^2\ell}{6\mathrm{E}I} - \frac{w\ell^3}{24\mathrm{E}I}\right) \times a = \frac{wa^4}{8\mathrm{E}I} + \frac{wa\ell(4a^2 - \ell^2)}{24\mathrm{E}I}$$